Elementy Metod Numerycznych

Podsumowanie wybranych zagadnień

Karol Frankiewicz

Arytmetyka FL

Jest to arytmetyka oparta na liczbach w zapisie zmiennopozycyjnym.

Działania w arytmetyce FL:

- Nie są łączne
- Są przemienne - a+b = b+a
- Nie występuje rozdzielność mnożenia wzgl. Dodawania

Arytmetyka FL

Obliczenia w arytmetyce FL – konsekwencje

- brak prawa łączności dla działań arytmetycznych, np. dodawania i mnożenia
- zależność wartości wyrażenia od sposobu jego zapisu

Uwarunkowanie zadania

Jeżeli niewielkie względnie zmiany danych zadania powodują duże względne zmiany jego rozwiązania, to zadanie takie nazywamy źle Uwarunkowanym.

Wielkość charakteryzującą wpływ wielkości zaburzeń na danych na rozwiązanie zadania nazywamy wskaźnikiem uwarunkowania.

Wskaźnik uwarunkowania Iloczynu skalarnego

Im bardziej wskaźnik uwarunkowania jest zbliżony do 1, tym lepiej jest uwarunkowane zadanie dla podanych danych.

$$cond_{(a,b)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|}{|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i|}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f wielomianu Ln stopnia co najwyżej n, którego wartości w n+1 punktach xi, i = 0,1,...,n są takie same jak interpolowanej funkcji Ln(xi) = f(xi) , i = 0,1,...,n

- Zagadnienie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznacznie określone rozwiązanie postaci

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Wielomiany bazowe pi (x) dla interpolacji w postaci Newtona przyjmują postać: Postać Newtona wielomianu Lagrange'a przedstawiamy :

$$p_0(x)=1$$
$$p_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Postać Newtona wielomianu Lagrange'a przedstawiamy :

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i\, p_i(x) \quad ,gdzie: \; b_i=\sum_{k=0}^{i} f\,\frac{(x_k)}{\prod_{j=0,\, j\neq k}^{i}(x_k-x_j)}$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Ilorazem różnicowym rzędu k funkcji f opartym na parami różnych węzłach xi (na których funkcja f jest określona) nazywamy wyrażenie:

$$f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] = \sum_{i=l}^{k+l} \frac{f(x_i)}{\prod_{i=l, j \neq i}^{k+l} (x_i - x_j)}$$

Dla dowolnego układu parami różnych węzłów zachodzi następująca zależność:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$f[x] = f(x)$$

Oszacowanie błędu interpolacji

Niech $f \in \mathbb{C}^{n+1}([a,b])$ oraz niech w – będzie wielomianem stopnia co najwyżej n, który przybliża funkcję f dla n+1 parami różnych węzłów x0, x1, ..., xn z przedziału [a,b]. Każdemu punktowi $x \in [a,b]$ odpowiada punkt $\varepsilon_x \in (a,b)$ taki że

$$|f(w) - w(x)| = \frac{1}{n+1!} \left| f^{(n+1)}(\varepsilon_x) \right| \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Oszacowanie błędu interpolacji

Stąd ogólne oszacowanie to

$$|f(x)-L_n(x)| \le |\omega_{n+1}^{L}| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|f(x)-H_n(x)| \le |\omega_{n+1}^{H}| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

gdzie

$$M_{n+1} = max_{y \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right|$$

$$\omega_{n+1}^{L} = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$\omega_{n+1}^{H} = (x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\dots(x-x_n)^{m_n}$$

Metody iteracyjne

Założenia:

Funkcja f jest ciągła na przedziale [a, b], wewnątrz przedziału znajduje się dokładnie jeden pierwiastek, na końcach przedziału funkcja przyjmuje przeciwne znaki tj. $f(a)f(b) < 0$

Kryteria stopu:

- $|f(x)| < eps$
- $|x_{i+1} - x_i| < eps$
- ustalona liczba iteracji
- x_k nie należy do [a, b]
- $|f(x_{k+1})| > |f(x_k)|$

Metody iteracyjne

Metoda bisekcji:

1. Wyznaczenie $x_k = (a_k+b_k)/2$

2. Sprawdzenie, czy $f(x_k) = 0 \Rightarrow x_k$ – pierwiastek w przeciwnym wypadku:

$f(a_k)f(x_k) < 0$, to $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$

$f(x_k)f(b_k) < 0$, to $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$

Ponowne wykonywanie punktu 1 z $k = k+1$

Metody iteracyjne

Metoda siecznych:

1. Wybranie przedziału [a,b], takiego że $f(a)f(b) < 0$ oraz $x_0=a$, $x_1=b$

2. $x_{k+1} = x_k - f(x_k) * (x_k – x_{k-1}) / (f(x_k) - f(x_{k-1}))$

3. Sprawdzenie, czy $f(x_{k+1}) = 0$ lub $|f(x_{k+1})| < eps$. W przeciwnym wypadku $k=k+1$ i powrót do punktu 2.

Metody iteracyjne

Metoda stycznych (Newtona):

1. Wybranie przedziału [a,b], takiego że $f(a)f(b) < 0$ oraz, gdy $f(a)f''(a)>0$, to $x1=a$, gdy $f(b)f''(b)>0$, to $x1=b$

2. $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

3. Sprawdzenie, czy $f(x_{k+1}) = 0$ lub $|f(x_{k+1})| < eps$. W przeciwnym wypadku $k=k+1$ i powrót do punktu 2.

Ogólna metoda iteracyjna

$f(x)=0 \Rightarrow x=F(x)$

$x_1=F(x_0)$, $x_2=F(x_1)$, ..., $x_{i+1}=F(x_i)$

Tw.
Ciąg przybliżeń jest zbieżny, gdy $|F'(d_i)|<1$, gdzie d_i jest punktem wewnętrznym przedziału o końcach x_i i x_{i+1}, z twierdzenia o wartości średniej. Im wartość $|F'(d_i)|$ jest bliższa zeru tym metoda "zbiega szybciej"

Pytanie 1

Konsekwencją obliczeń w arytmetyce zmiennopozycyjnej jest:

(a) brak prawa łączności dla działań arytmetycznych, np. dodawania i mnożenia

TAK

(b) zależność wartości wyrażenia od sposobu jego zapisu

TAK

(c) brak wpływu na wynik obliczeń

NIE

Pytanie 2

Należy obliczyć iloczyn skalarny wektorów $a = (-1, 3, -2, 7, 9, -6, -15, 8, 4)$ i $b = (2, -7, 5, -2, 1, 8, 12, -3, -9)$. Czy zmiana 5 składowej wektora a z 9 na −9 :

(a) poprawia uwarunkowanie tego zadania

TAK

(b) pogarsza uwarunkowanie tego zadania

NIE

(c) nie zmienia uwarunkowanie zadania

NIE

•

Pytanie 3

Określ prawdziwość następujących zdań

(a) interpolacja Hermite’a jest szczególnym przypadkiem interpolacji La-grange’a

NIE

(b) interpolacja Lagrange’a jest szczególnym przypadkiem interpolacji Hermite’a

TAK

(c) interpolacja Hermite’a korzysta z wartości funkcji i jej pochodnych

TAK

Pytanie 4

sin π/5 z wykorzystaniem wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a i wartości sin π/6 , sin π/4 i sin π/3 można obliczyć z błędem nie większym niż:

(a) 0.0002

NIE

(b) 0.0004

NIE

(c) 0.001

TAK

Pytanie 5

Dana jest skalarna metoda iteracyjna xi+1 = F (xi) wyznaczania pierwiastka leżącego w pewnym przedziale [a, b]. Warunkiem jej zbieżności jest:

(a) ciągłość funkcji F na przedziale [a, b]

NIE

(b) monotoniczność funkcji F na przedziale [a, b]

NIE

(c) wartość pochodnej funkcji F na przedziale [a, b]

TAK

Wzór iteracyjny Newtona służący do obliczania $(R)^{1/3}$ dla $R > 0$ to:

(a) $x_{i+1} = x_i^3 - R$

NIE

(b) $x_{i+1} = x_i - R^3$

NIE

(c) $x_{i+1} = 1/3\ (2x_i + R/x2_i)$

TAK

Pytanie 7

Iloczyn dwóch macierzy kwadratowych stopnia n można obliczyć kosztem rzędu:

(a) n^3 działań

TAK

(b) $n^{\log_2 7}$ działań

TAK

(c) n działań

NIE