MATEMATYKA DYSKRETNA

WSTĘP

W niniejszej prezentacji mam zamiar przedstawić w skrócie to czego nauczyłem się na przedmiocie o tajemniczej nazwie **Matematyka Dyskretna**.

Na przedmiot uczęszczałem podczas **I semestr**u studiów na kierunku **Informatyka** na wydziale Matematyka i Informatyki **Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu**. Wykładowcą był profesor doktor habilitowany **Jerzy Jaworski**, a moje ćwiczenia prowadziła doktor **Edyta Szymańska**. Cały przedmiot jak i wyżej wspomnianych dobrze wspominam.

W skrócie na przedmiot składały się zagadnienia z **dowodzenia twierdzeń matematycznych**, **praw i metod przeliczania**, **kombinatoryki**, **teorii grafów**, **rekurencji** i kilku innych kwestii. Wszystko postaram się przedstawić w jasny sposób na następnych slajdach komentując je na zajęciach. Na koniec skomentuję także rozwiązanie **przykładowych zadań**.

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych.

$p(n)$ jest zdaniem, które chcemy udowodnić, a celem metody jest pokazać, że $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego n_0 większego od n ($n \in \mathbb{N}$).

$$[\ p(n_0) \wedge \forall_{k>n_0}\ p(k) => p(k+1)\ ] => \forall_{n \geq n_0}\ p(n)$$

sprawdzenie

założenie indukcyjne

krok indukcyjny

teza indukcyjna

konkluzja

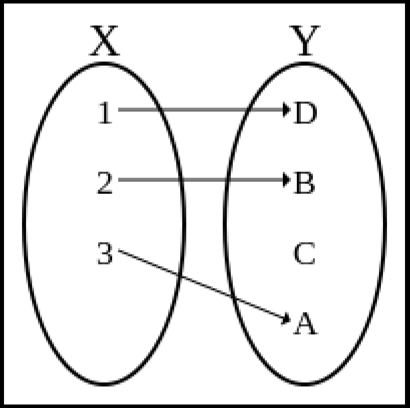
INIEKCJA

Iniekcja to funkcja różnowartościowa, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz.

Inaczej nazywamy ją „1 – 1”.

$a,b \in X \qquad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$|X| \leq |Y|$

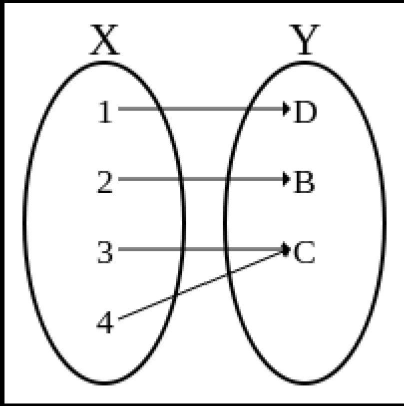


SURIEKCJA

Suriekcja to funkcja przyjmująca jako swoje wartości wszystkie elementy przeciwdziedziny, tj. której obraz jest równy przeciwdziedzinie.

Inaczej nazywamy taką funkcję „na”.

$|X| \geq |Y|$

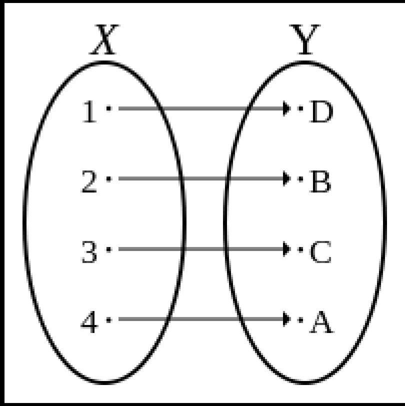


BIJEKCJA

Bijekcja to funkcja (relacja) taka, że każdemu elementowi obrazu odpowiada dokładnie jeden element dziedziny.

Relacja jest równocześnie „1 – 1” oraz „na”.

$$|X| = |Y|$$



ZASADA MNOŻENIA

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zadanymi zbiorami skończonymi.
Wówczas liczba wszystkich ciągów postaci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
gdzie $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ jest równa $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

Uogólnione prawo mnożenia

Jeżeli pewna procedura może być rozbita na n kolejnych kroków z r_1 możliwymi wynikami w kroku 1, r_2 możliwymi wynikami w kroku 2, … , r_n możliwymi wynikami w kroku n-tym to w całej procedurze mamy $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$ możliwych łącznych wyników.

PRAWO DODAWANIA

$$A \cap B = \emptyset$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

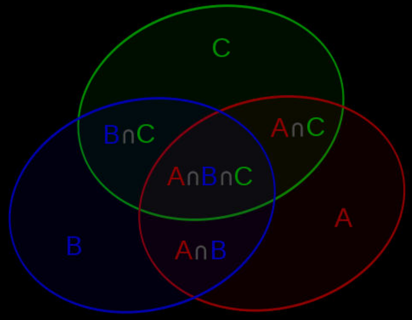
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

Reguła kombinatoryczna, pozwalająca na określenie liczby elementów skończonej sumy mnogościowej skończonych zbiorów.

$$
\begin{gathered}
| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - \\
- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_{n-1} \cap A_n| + \\
+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + | A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\
- \ldots - \\
+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{gathered}
$$



WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

k-elementowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego, k-elementowy ciąg utworzony z elementów zbioru n-elementowego

$W_k^n = n^k$ (na mocy prawa mnożenia)

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

k-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego, k-elementowy ciąg utworzony z elementów zbioru n-elementowego

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

PERMUTACJE

n-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego, n-elementowy ciąg

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

KOMBINACJE Z POWTÓRZENIAMI

k-elementowa kombinacja z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego,

k-elementowy podzbiór utworzony z elementów zbioru n-elementowego (mogą się powtarzać)

$$\mathrm{C}_k^n = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

KOMBINACJE BEZ POWTÓRZEŃ

k-elementowe kombinacje bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego,

k-elementowy podzbiór utworzony z elementów zbioru n-elementowego

$$C_k^n = \binom{n}{k}$$

KOMBINATORYKA

Podsumowanie:

$$W_k^n = n^k$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_n = n!$$

$$C_k^n = \binom{k+n-1}{k}$$

$$C_k^n = \binom{n}{k}$$

wariacje – ciągi – uporządkowane (kolejność jest ważna)

kombinacje – podzbiory – nieuporządkowane

REKURENCJA

Rekurencja, zwana także rekursją to odwoływanie się np. funkcji lub definicji do samej siebie.

W logice wnioskowanie rekurencyjne opiera się na założeniu istnienia pewnego stanu początkowego oraz zdania (lub zdań) stanowiącego podstawę wnioskowania (przy czym, aby cały dowód był poprawny, zarówno reguła, jak i stan początkowy muszą być prawdziwe). Istotą rekurencji jest tożsamość dziedziny i przeciwdziedziny reguły wnioskowania, wskutek czego wynik wnioskowania może podlegać tej samej regule zastosowanej ponownie.

TEORIA GRAFÓW 1/4

„Kropki” na grafach oznaczają wierzchołki. Zbiór wierzchołków nigdy nie jest pusty.

Wierzchołki mogą być ze sobą połączone linią którą nazywamy „krawędzią”.

Grafem nieskierowanym nazywamy uporządkowaną trójkę G=(V(G), E(G), ψ_G). V(G) to nie pusty zbiór wierzchołków, E(G) jest zbiorem krawędzi rozłącznym z V, a ψ_G jest funkcją incydencji, która przypisuje każdej krawędzi z E nieuporządkowaną parę wierzchołków z V.

Graf nazywamy skierowanym kiedy możemy „iść w jedną stronę”.

Graf nazywamy prostym, gdy jest nieskierowany i nie ma pętli, ani krawędzi wielokrotnych.

Dwa grafy G i H są identyczne tylko wtedy gdy V(G) = V(H), E(G) = E(H) oraz $\psi_G = \psi_H$.

TEORIA GRAFÓW 2/4

Stopniem $d(v) = d_G(v)$ wierzchołka v w grafie G nazywamy liczbę krawędzi grafu G identycznych z v, przy czym każdą pętlę liczymy dwukrotnie. Przez $\Delta(G)$ oraz $\delta(G)$ oznaczają kolejno maksymalny i minimalny stopień wierzchołków krawędzi grafu G.

Wierzchołki przyległe to takie które mają tą samą krawędź.

Mówimy, że graf jest planarny, jeżeli możemy go rozłożyć na płaszczyźnie.

Graf nazywamy regularnym kiedy wszystkie jego wierzchołki mają ten sam stopień.

Dopełnieniem G^C prostego grafu nazywamy graf prosty o zbiorze wierzchołków V(G) przy czym dwa wierzchołki są przyległe w G^C wtedy i tylko wtedy gdy nie są przyległe w G.

Grafem pełnym nazywamy graf dla którego wszystkie pary wierzchołków są przyległe.

TEORIA GRAFÓW 3/4

Graf pusty (dopełnienie pełnego) ma miejsce gdy zbiór krawędzi jest pusty.

Macierz incydencji grafu skierowanego $G = (V, K)$ o zbiorze wierzchołków $V = v_1, \dots, v_n$ i krawędzi $K = k_1, \dots, k_m$ nazywamy macierz $M = (m_{ij})$, gdzie $i=1,\dots,n$ oraz $j=1,\dots,m$ taką, że: $m_{ij} = 1$ jeśli v_i jest początkiem krawędzi k_j, $m_{ij} = -1$ jeśli v_i jest końcem krawędzi k_j, a $m_{ij} = 0$ jeśli v_i i k_j nie są incydentne.

Dla danego grafu $G = (V,E)$ macierz $A(G) = (a_{ij})$, gdzie a_{ij} jest liczbą krawędzi łączących wierzchołki v_i oraz v_j nazywamy macierzą incydencji.

Izomorfizm grafów występuje wtedy gdy jestem w stanie narysować 2 grafy za pomocą jednego rysunku (nie uwzględniając oznaczeń).

Wierzchołki izolowane mają stopień 0.

TEORIA GRAFÓW 4/4

W każdym grafie istnieją co najmniej 2 wierzchołki o tym samym stopniu.
Suma wierzchołków w grafie jest równa podwojonej liczbie krawędzi $\sum_{v \epsilon V} dG(v) = 2|E|$.

Spacer – dowolność (wierzchołki i krawędzie mogą się powtarzać).
Szlak (tylko wierzchołki mogą się powtarzać).
Ścieżka (nic się nie powtarza).
Las jest drzewem bez cykli.

Graf hamiltonowski to graf zawierający ścieżkę (drogę) przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz zwaną ścieżką Hamiltona.

Graf eulerowski to rodzaj grafu który odznacza się tym, że da się w nim skonstruować cykl Eulera, czyli cykl, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz i wraca do punktu wyjściowego.

ZASADA SZUFLADKOWA

Jeżeli rozmieścimy n kul w m szufladkach ($n > m$) to istnieje szufladka zawierająca co najmniej 2 kule.

Jeżeli rozmieścimy n kul w m szufladkach $n > m \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ to istnieje szufladka zawierająca co najmniej $|\frac{n}{m}| = k + 1$ kul.

TEST 1/12

Dany jest ciąg spełniający zależność rekurencyjną

$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $n \geq 2$, przy czym $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Wtedy:

(a) $a_3 = 19$

(b) Równanie charakterystyczne powyższej zależności rekurencyjnej to

$x^2 - 4x + 3 = 0$

(c) $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ dla wszystkich $n \geq 0$

TEST 2/12

Niech a_n oznacza liczbę podziałów zbioru n-elementowego na dwa niepuste podzbiory. Łatwo zauważyć, ze $a_1 = 0$. Ponadto:

(a) a_n spełnia rekurencje $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n \geq 2$

(b) $a_n = 2^{n-1} + 1$ dla $n \geq 1$

(c) $a_{n+2} = 4a_n + 3$ dla $n \geq 1$

TEST 3/12

Ciąg a_n spełnia równanie rekurencyjne $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n \geq 2$ z warunkami początkowymi $a_1 = 0$, $a_1 = 1$.
Jest on rozwiązaniem następującego problemu przeliczeniowego:

(a) Na ile sposobów można wciągnąć na n–metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone maja szerokość dwóch metrów, a pozostałe jednego metra?
(b) Ile jest ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie stoją obok siebie?
(c) Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach 2 na n kostkami o wymiarach 2 na 1?

TEST 4/12

Usuwamy krawędź $e = \{u,v\}$ z grafu spójnego G. Wtedy G – e ma zawsze:

(a) co najmniej dwie składowe spójności
(b) G – e ma zawsze co najwyżej dwie składowe spójności
(c) G – e ma zawsze co najwyżej $d_G(v) + d_G(u)$ składowych spójności

TEST 5/12

Grafy G i H są izomorficzne, gdy:

(a) istnieje funkcja f : V (G) -> V (H) taka, że jeżeli {u, v} ϵ E(G) to {f(u), f(v)} ϵ E(G)

(b) istnieje bijekcja f : V (G) -> V (H) taka, że {u, v} ϵ E(G) wtedy i tylko wtedy, gdy {f(u), f(v)} ϵ E(G)

(c) istnieje bijekcja f : E(G) -> E(H) taka, że e ϵ E(G) wtedy i tylko wtedy, gdy f(e) ϵ E(G)

TEST 6/12

Spacerem w grafie nazywamy ciąg różnych krawędzi, z których każde dwie kolejne krawędzie maja wspólny wierzchołek. Obchód Eulera to spacer przechodzący przez wszystkie krawędzie grafu i powracający do wierzchołka początkowego. W grafie spójnym G istnieje obchód Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest:

(a) równa 0

(b) parzysta

(c) mniejsza lub równa 2

TEST 7/12

Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy każdy rozpięty podgraf grafu G, który jest cyklem. Jeśli graf G zawiera cykl Hamiltona, to wszystkie wierzchołki grafu G maja stopnie:

(a) równe dwa
(b) większe bądź równe dwa
(c) parzyste

TEST 8/12

Zdanie „Jeśli dziś piątek, to jutro niedziela”:

(a) jest prawdziwe tylko w sobotę
(b) jest prawdziwe we wszystkie dni tygodnia oprócz piątku
(c) nie jest prawdziwe w żaden dzień tygodnia

TEST 9/12

Wybieramy dowolnie $n + 1$ różnych liczb spośród $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, $n \geq 1$.
Wtedy wśród wybranych liczb zawsze będą dwie:

(a) które sumują się do $2n$

(b) które są względnie pierwsze

(c) których różnica dzieli się przez n

TEST 10/12

Poniższe stwierdzenie jest równoważne zasadzie iniekcji:

(a) jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje iniekcja $f : A \to B$
(b) jeśli $|A| \leq |B|$, to istnieje różnowartościowa funkcja $f : A \to B$
(c) jeśli $|A| \geq |B| + 1$, to dla każdej funkcji $f : A \to B$ istnieją $a_1, a_2 \in A$ takie, że $a_1 \neq a_2$ oraz $f(a_1) = f(a_2)$

TEST 11/12

Ustawiamy w rzędzie n par identycznych bliźniąt. W ilu ustawieniach żadna para bliźniąt nie stoi obok siebie ?

(a) $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^i}$$

(b) $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-1}}$$

(c) $$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}\frac{(2n-1)!}{2^i}$$

TEST 12/12

Załóżmy, że liczba naturalna n ma te własność, że istnieje las na n wierzchołkach, którego dopełnienie jest drzewem. Wtedy:

(a) n może być równe 4

(b) $n > 4$

(c) $n < 5$