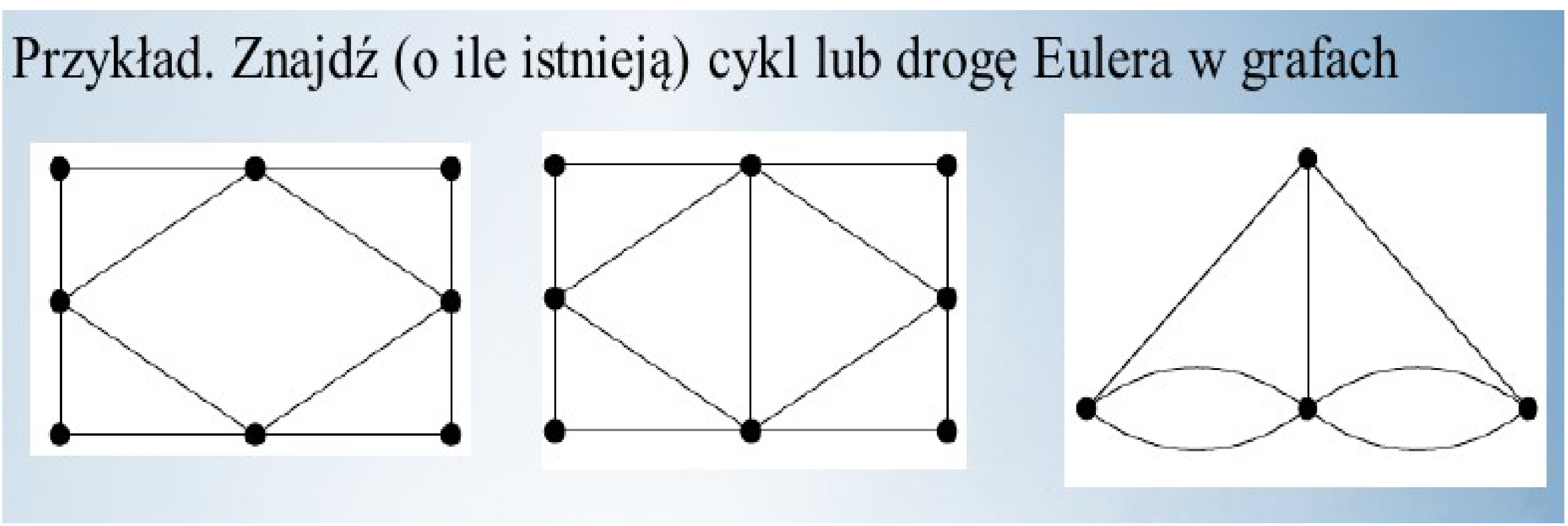
Grafy Eulera i Hamiltona

„Ścieżka” (droga) Eulera w grafie skierowanym lub nieskierowanym – droga zawierająca wszystkie krawędzie lub łuki grafu, każdą dokładnie raz. Może wielokrotnie przechodzić przez dany wierz!

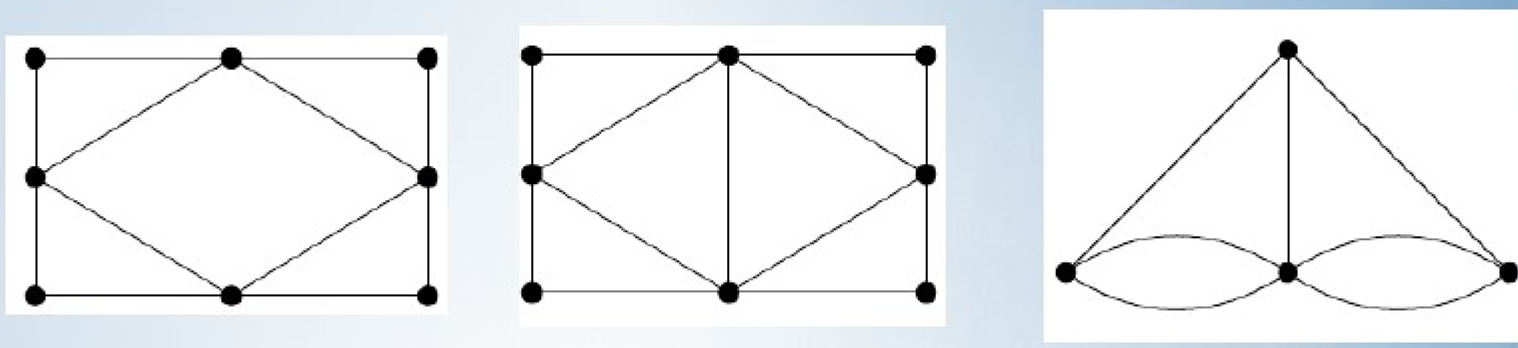
„Cykl” (obchód) Eulera – cykl zawierający wszystkie krawędzie lub łuki grafu.

Graf, w którym istnieje cykl Eulera nazywamy grafem eulerowskim, a gdy istnieje tylko droga – grafem półeulerowskim.

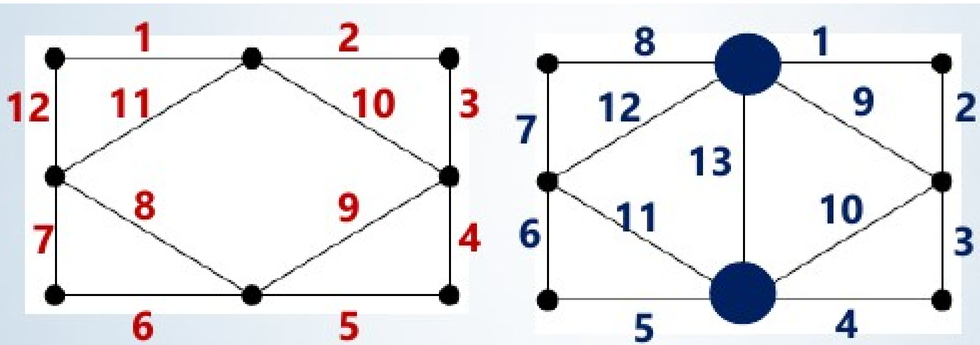


Grafy Eulera i Hamiltona

Przykład. Znajdź (o ile istnieją) cykl lub drogę Eulera w grafach



Odpowiedź:



jest cykl Eulera

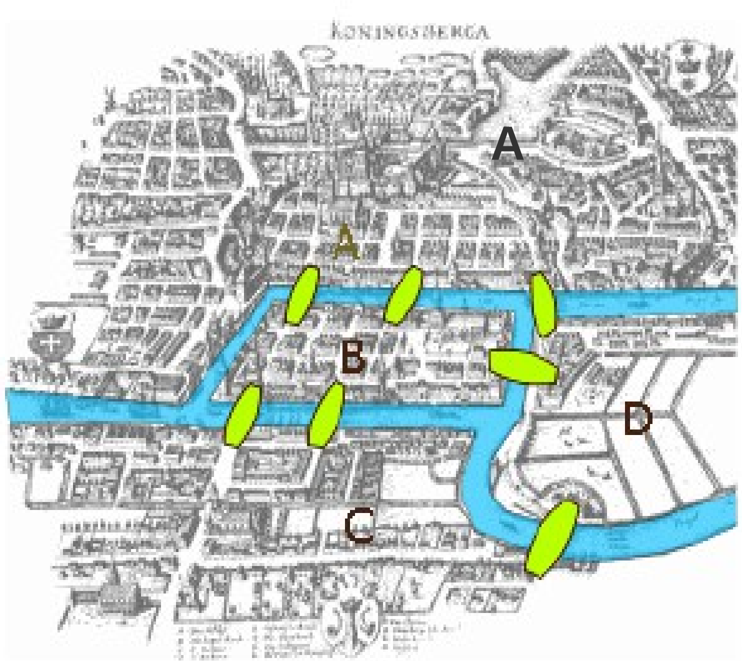
nie ma cyklu Eulera
jest droga Eulera

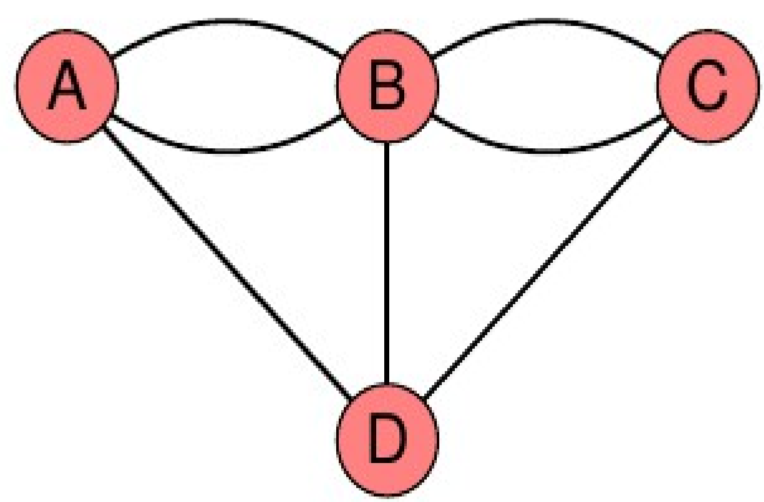
nie ma ani cyku Eulera
ani drogi Eulera

Grafy Eulera i Hamiltona

Twierdzenie (Euler, 1736)
Graf nieskierowany spójny jest *eulerowski* (ma cykl Eulera) wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

Wniosek. Graf nieskierowany spójny mający dokładnie dwa wierzchołki nieparzystego stopnia ma drogę Eulera (jest *półeulerowski*). Każda taka droga musi zaczynać się w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia i kończyć w drugim takim wierzchołku.

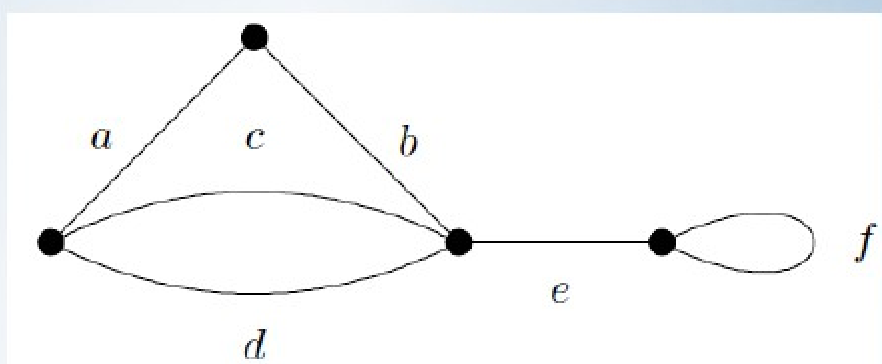




Grafy Eulera i Hamiltona
Algorytm Fleury'ego (cykl Eulera)

Założenie: Niech G będzie nieskierowanym grafem eulerowskim.
Algorytm znajdujący cykl Eulera w grafie G:
Zacznij cykl w dowolnym wierzchołku,
a następnie przechodź krawędzie w dowolnej kolejności,
dbając o zachowanie następujących zasad:
1. usuwaj z grafu przechodzone krawędzie i wierzchołki izolowane w wyniku usuwania tych krawędzi,
2. w każdym momencie przechodź przez most tylko wtedy, gdy nie masz innej możliwości.

Most – krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych tego grafu.



Grafy Eulera i Hamiltona

Algorytm Fleury'ego (cykl Eulera)

Jak sprawdzić, czy dana {x, y } jest mostem?

1. Usuń {x, y } z grafu G.
2. Wykonaj przeszukiwanie grafu G \ {x, y } od wierzchołka x (np. metodą BFS):

    Jeżeli w trakcie przeszukiwania dotarliśmy do y , to {x, y} nie jest krawędzią cięcia; W p.p. {x, y} jest krawędzią cięcia

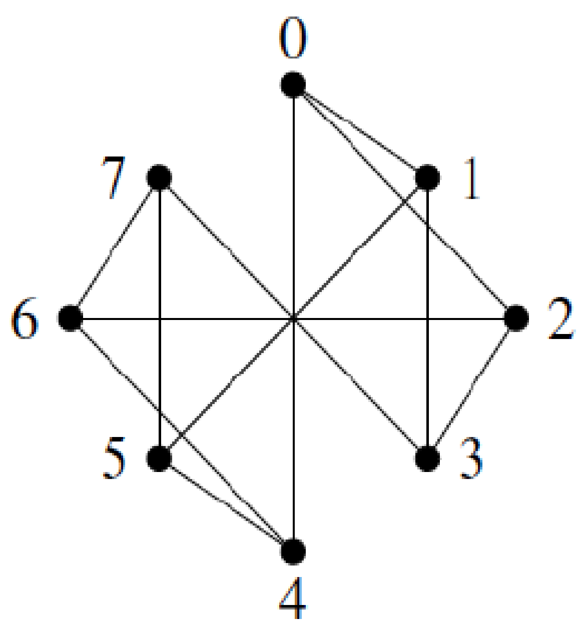
Pytanie: dla grafu G=(V,E), |V|=n, |E|=m,
  ile czasu zajmuje procedura BFS ???
    Odp: O(n+m)

Czas działania alg Fleury'ego:
  O(m*(n+m)) = O(m^2) = O(n^4)

Grafy Eulera i Hamiltona

Ścieżka Hamiltona w grafie skierowanym lub nieskierowanym – ścieżka, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu
(wierz się nie powtarzają!).
Cykl Hamiltona – cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu
(wierz się nie powtarzają!).

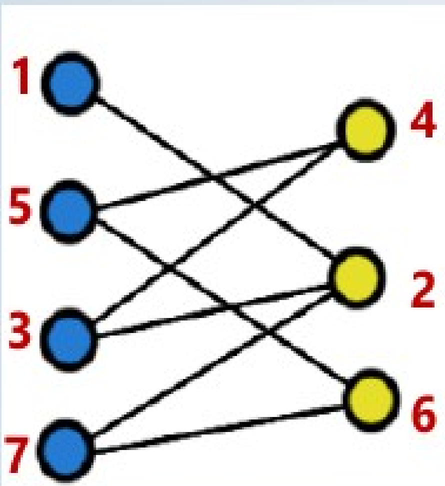
Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona nazywamy grafem **hamiltonowskim**, a gdy istnieje tylko droga – grafem **półhamiltonowskim**.

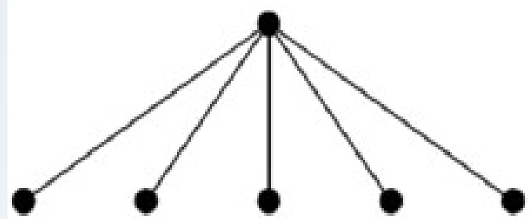


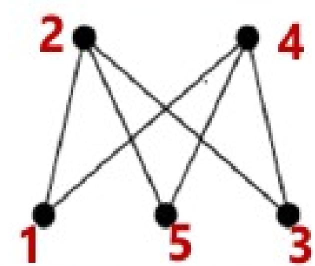
Przykładowe cykle Hamiltona:
(0,1,3,7,5,4,6,2,0)
(0,2,3,1,5,7,6,4,0)

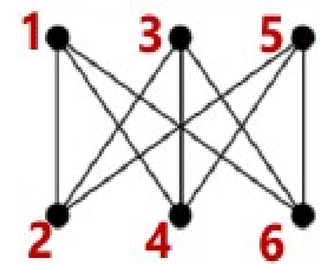
Przykłady cykli/ ścieżek Hamiltona i Tw z warunkiem dostatecznym...

Przykład. Znajdź cykl Hamiltona (o ile istnieje) w grafach









nie ma cyklu jest droga Hamiltona	nie ma ani cyklu ani drogi Hamiltona	nie ma cyklu jest droga Hamiltona	jest cykl Hamiltona

Tw. Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wtedy

- jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$,
- jeśli G ma drogę Hamiltona, to $\big||V_1| - |V_2|\big| \leq 1$.

Tw. (warunki dostateczne na to, aby graf był hamiltonowski)

- **Tw**. (Ore, 1960) Graf nieskierowany o $n \geq 3$ wierzchołkach, w którym $d(v) + d(w) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków v, w niepołączonych krawędzią, jest hamiltonowski.
- **Tw**. (Dirac, 1952) Jeżeli graf nieskierowany ma $n \geq 3$ wierzchołków oraz stopień $d(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka, to graf jest hamiltonowski.
- **Tw**. Jeżeli graf nieskierowany ma $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi, to graf jest hamiltonowski.
- **Tw**. (Nash-Wiliams, 1969) Jeżeli G jest grafem skierowanym bez pętli, w którym stopień wejściowy oraz stopień wyjściowy każdego wierzchołka jest równy co najmniej $\frac{n}{2}$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Graf Hamiltona – algorytm ?

Możliwe rozwiązanie to algorytm „siłowy” (ang. brute force):

G=(V,E), |V|=n, |E|=m

1. generować wszystkie możliwe permutacje wierz
   czyli ciągi liczb z {1,...,n} (jest tych permutacji „n!”)
2. dla każdej permutacji sprawdzać czy jest cyklem Hamiltona
   wystarczy sprawdzić czy sąsiednie wierz w permutacji
   są połączone kraw...
   dla macierzowej repr grafy da się to zrobić w czasie O(n)

Jak generować permutacje n-elementowe ? Odp: rekurencja !!!

Uwaga: dla problemu cyklu Hamiltona
nie istnieje alg wielomianowy...
można sprawdzić czy dane „rozwiązanie” (permutacja)
jest cyklem Hamiltona, w czasie wielomianowym
Problem cyklu Hamiltona jest problemem **klasy NP**

Najkrótsze ścieżki

- digraf, z wagami na kraw, w(e)>=0
- problem: najlżejsze ścieżki z 1 źródłem „s” do wsz innych wierz
- **fakt**: ścieżki te tworzą drzewo! Dowód??
- reprezentacja „ścieżek z 1 źródłem”: dla wierz „v”
    v.pi = parent wierz v
    v.d = górne oszacowanie ważonej odległości od „s” =delta(s,v)
- główne narzędzie do obliczania n.ść.: proc Relax

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex v ∈ G.V
    v.d = ∞
    v.π = NIL
s.d = 0
```

To się uruchamia
na początku

```
RELAX(u, v, w)
if v.d > u.d + w(u, v)
    v.d = u.d + w(u, v)
    v.π = u
```

Fakt: po dowolnych wywołaniach Relax
mamy: delta(s,v) <= v.d

Dowód: na początku jest ok,
po 1 op Relax mamy ścieżkę o odp wadze

Najkrótsze ścieżki
algorytm Dijkstry

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = Ø
Q = G.V
while Q ≠ Ø
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

Tu jest ukryte DecreaseKey !!!

„Q” -kolejka prior, prior=v.d
zbudowana z kopca bin...

Złożoność alg Dijkstry:
n*logn + m*logn = O(m*logn)

Tw: po zakończniu proc Dijkstra,
dla każdego wierz „v”:
v.d=delta(s,v),
natomiast v.pi reprezentuje
drzewo n.śc. z 1 źródłem

Dowód: nie wprost; niech „u” będzie
pierwszym wierz, t.że u.d != delta(s,u)
w momencie gdy u jest wł do S...
u.d < inf (dlaczego ??)
czyli istnieje najkrótsza śc. s-->u
dokładniej: s-->x-y-->u, gdzie x in S
oraz y not in S (istnieje kraw (x,y))
skoro x in S, to wywołano Relax(x,y)
zatem y.d=delta(s,y)
<= delta(s,u) <=u.d
ale u.d<=y.d (z powodu ExtractMin)
czyli y.d=delta(s,y)=<u>delta(s,u)=u.d</u>
Sprzeczność !!!

Najkrótsze ścieżki
algorytm Dijkstry

Przykład działania alg Dijkstry... w kółku v.d, gruba kraw do v.pi