

# Obliczenia rozproszone przy pomocy klastrów w grafach **planarnych**, *używa się **długich komunikatów!***

(1+eps)-aproxymacja problemów MIS, MM, MDS

MIS = Maximum Independent Set

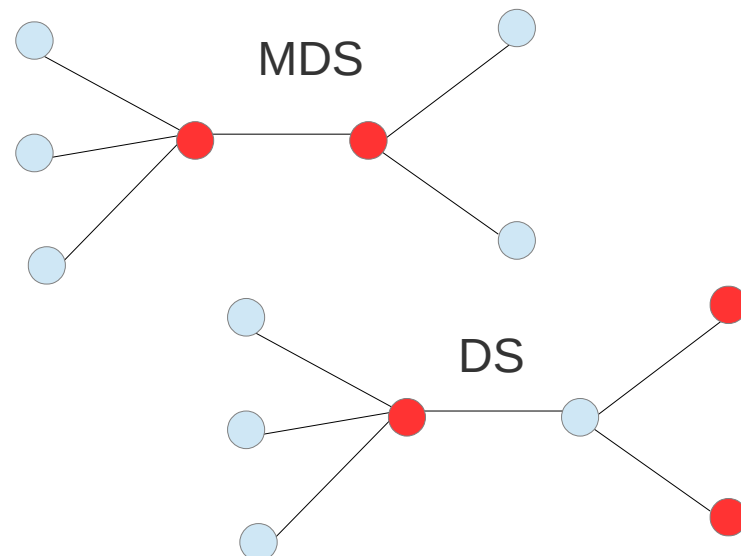
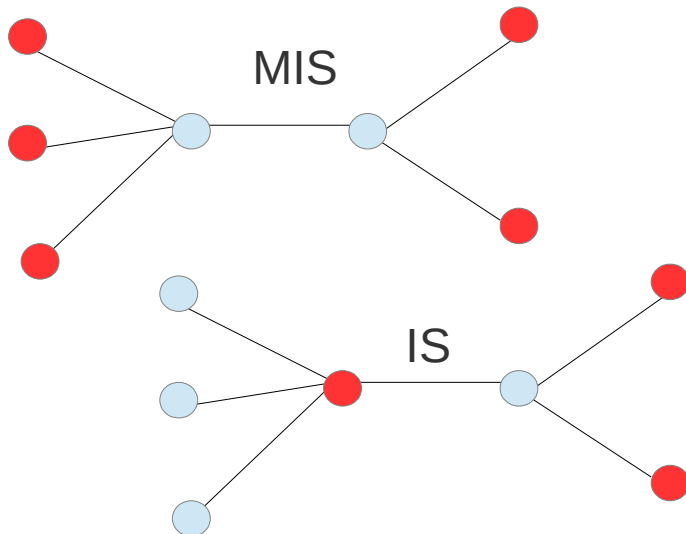
Independent Set = żadne dwa wierz nie są połączone

MWIS = MIS „z wagami”, chodzi o wagę IS, a nie moc...

MM = Maximum Matching (skojarzenia!)

MDS = Minimum Dominating Set

Dominating Set = zbiór D; każdy wierz należy do D  
lub ma sąsiada w zb. D



Co to jest (1-eps) aproks problemu X (gdzie X=MIS/MWIS, MM) ?

X – rozwiązanie obl przez nasz algorytm

X' - rozwiązanie optymalne

$$\frac{|X|}{|X'|} > 1 - eps$$

Co to jest (1+eps) aproks problemu MDS ?

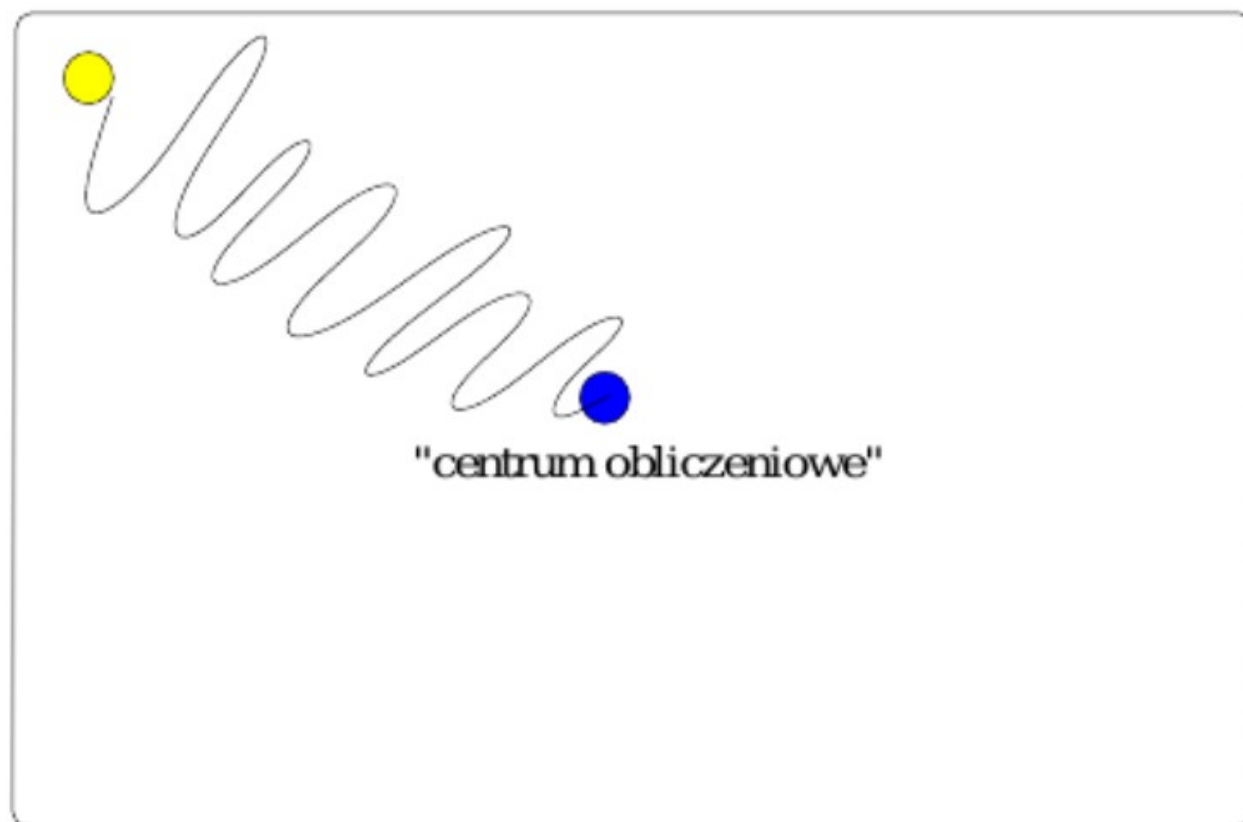
(trochę inaczej bo MDS jest probl minimalizacji!)

D – rozwiązanie obl przez nasz algorytm

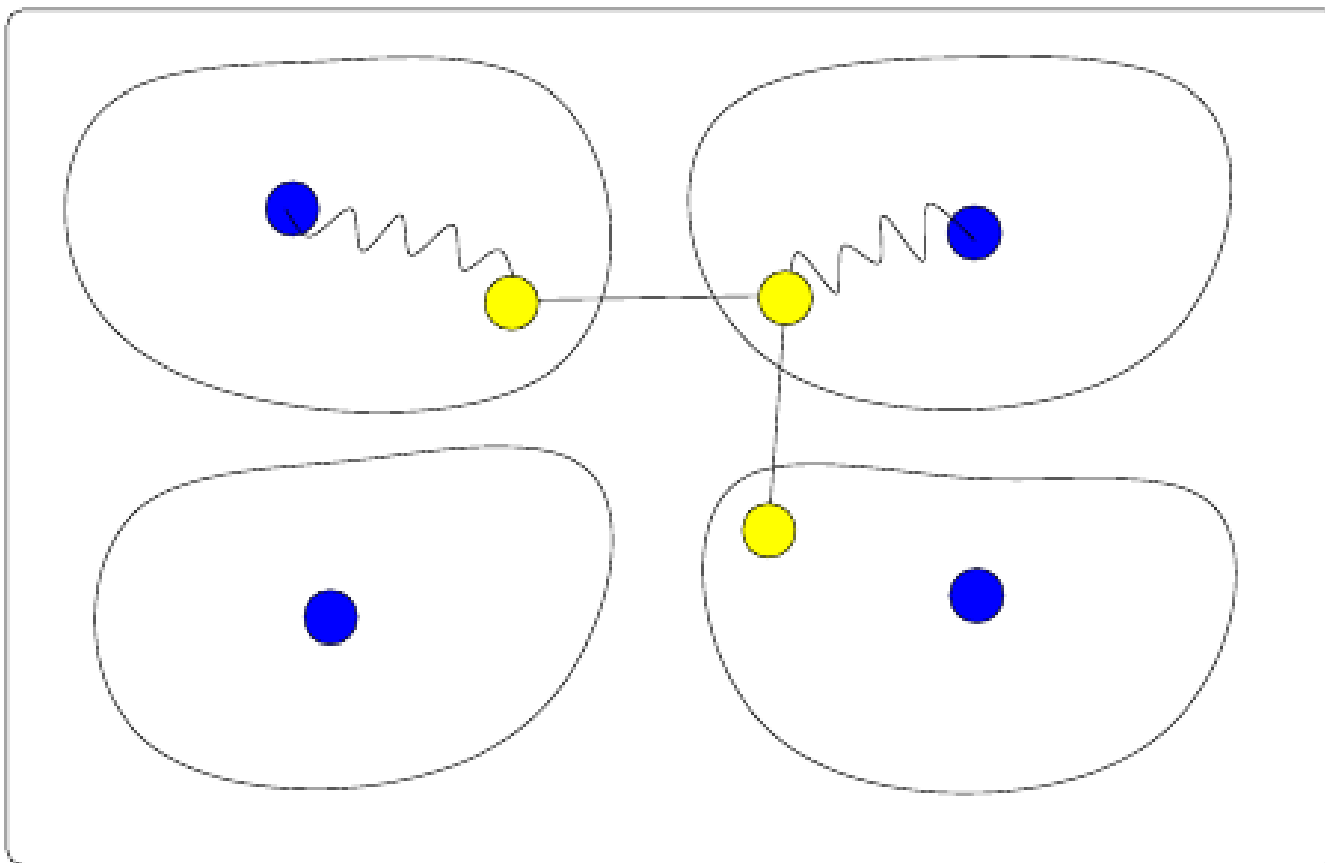
D' – rozwiązanie opt (MDS)

$$\frac{|D|}{|D'|} < 1 + eps$$

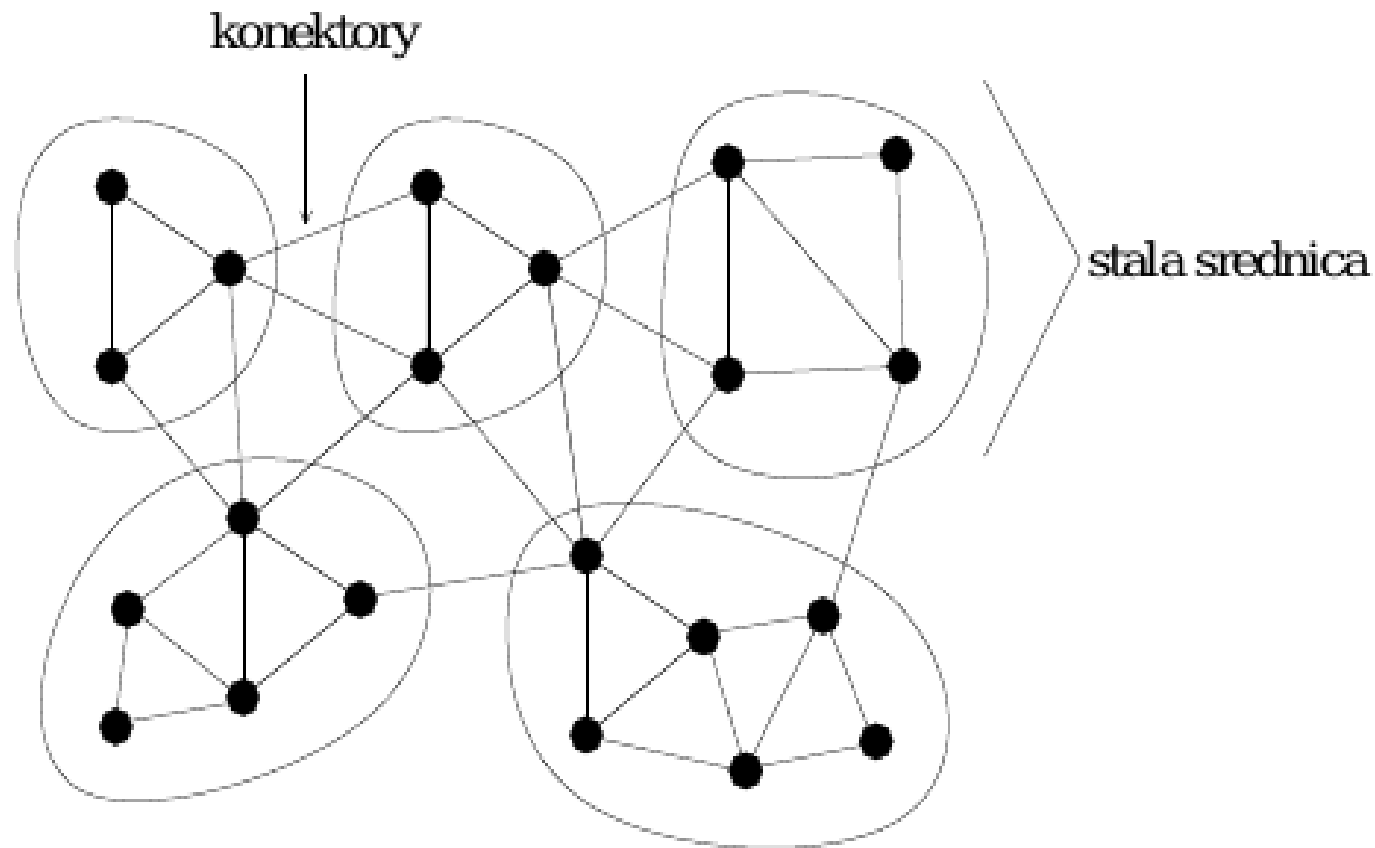
## Pochodzenie koncepcji klastrów ...



- *czy warto scentralizować obliczenia ?*
- zebrać informacje o całym grafie do centrum obliczeniowego, wykonać obliczenia i rozesłać wyniki spowrotem???
- b. czasochłonne, jeśli graf ma dużą średnicę...



- co to są **klastry**? podział wierzchołków grafu  $G$  na podzbiory  $V_1, \dots, V_k$  takie, że  $G[V_i]$  jest spójny i ma małą średnicę
- centralizujemy obliczenia w klastrach, czyli...
- w klastrach, równoległe, rozwiązuje się wejściowy problem
- uwaga na to, co dzieje się na brzegu klastrów !!



klastry krawędziowe dla grafów planarnych

krawędzie mają wagi  $\omega_e : E(G) \rightarrow \mathcal{R}^+$

waga konektorów (zbiór  $L$ ) jest mała:  $\omega_e(L) < \epsilon \omega_e(E(G))$

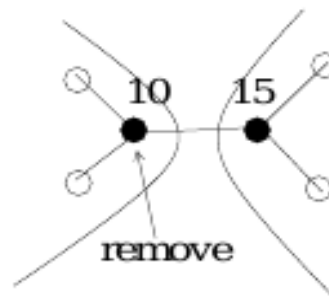
## Mamy klastry... jak obl. MWIS ?

### How to $(1 - \epsilon)$ -approximate MWIS

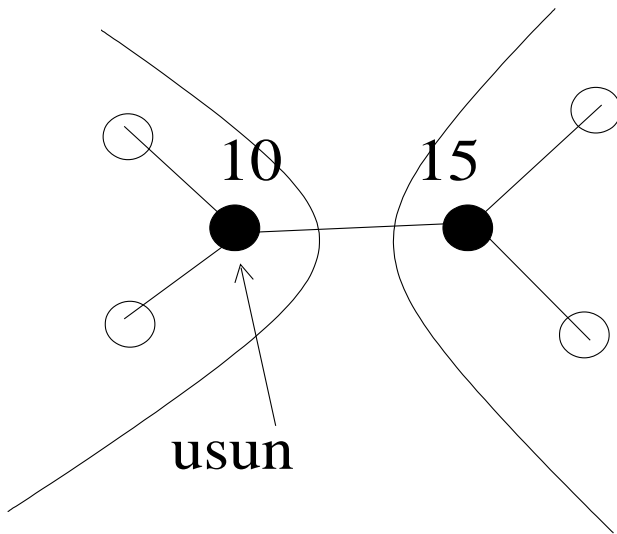
We have a planar graph  $G$  with weights on vertices  $\omega : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$

1. Define  $\omega(\{u, v\}) := \min(\omega(u), \omega(v))$
2. Compute clusters with weight of connectors  $< \epsilon \omega(E(G))$
3. In each cluster compute (optimal) MWIS
4. In case of errors on connectors: remove from the solution the vertex of smaller weight.

We know that  $\omega(\text{MWIS}(G)) > \frac{1}{4}\omega(V(G))$  and  $\omega(E(G)) < 3\omega(V(G))$  therefore vertices removed in (4) are meaningless ...



## MWIS przy pomocy klastrów – argument...



Dlaczego ten algorytm oblicza  
(1-eps)-apros MWIS  
w czasie  $O(1)$  + "czas obl klastrów" ?

Pkt 3 można wykonać w czasie const,  
bo klastry mają stałą średnicę...  
(można ściągnąć cały graf do 1 wierz  
w stałym czasie)

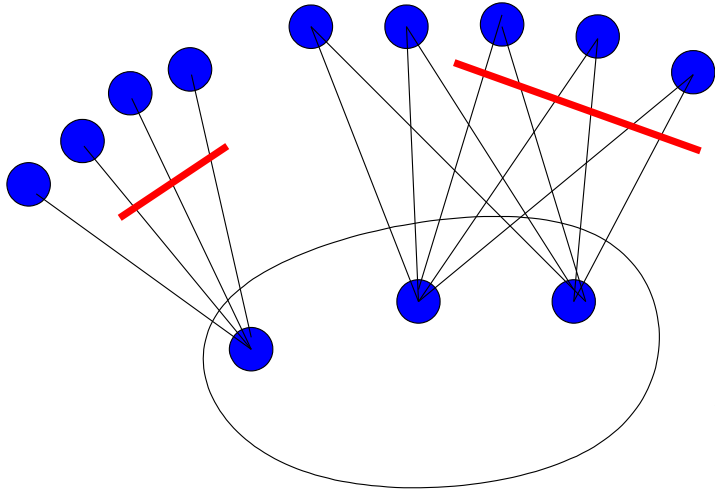
W każdym klastrze mamy MWIS;  
są jednak konflikty na konektorach,  
które trzeba usuwać... ile wtedy tracimy?

Odp:

1.  $\omega(\text{MWIS}(G)) > 1/12 \omega(E(G))$
2.  $L$  – zb. konektorów;  $\omega(L) < \varepsilon \omega(E(G))$
3. tracimy na wadze  $< \omega(L)$

Czyli „tracimy na wadze”  $< \varepsilon 12 \omega(\text{MWIS}(G))$  !!

# MM (skojarzenia) przy pomocy klastrów



Zidentyfikować „wiszące”  
gwiazdy i podwójne gwiazdy,  
usunąć odp wierz...

**Można udowodnić**, że po takiej operacji  
MM jest mocy  $> 1/10 |E|$

Zakładamy, że kraw  $e$  ma  $\omega(e)=1$ ;  
Możemy obliczyć klastry i w nich MM...

Uwaga: MM może być małe w porównaniu do  $|E|$   
dla MIS było inaczej... MIS jest zawsze duży  
w porównaniu do  $|E|$  !!!

Potrzebny „preprocessing” który to zmieni...



Ta operacja nie ma wpływu na rozmiar MM,  
ale powoduje że MM jest „duże”  
w porównaniu do  $|V|$  i  $|E|$ ,

A liczba konektorów jest  $< \varepsilon |E|$   
czyli z opt skoj  $M^*$  tracimy  $< 10 \varepsilon |M^*|$

## Proc obl MM:

1. preprocessing
2. oblicz klastry
3. w klastrach oblicz (opt) MM

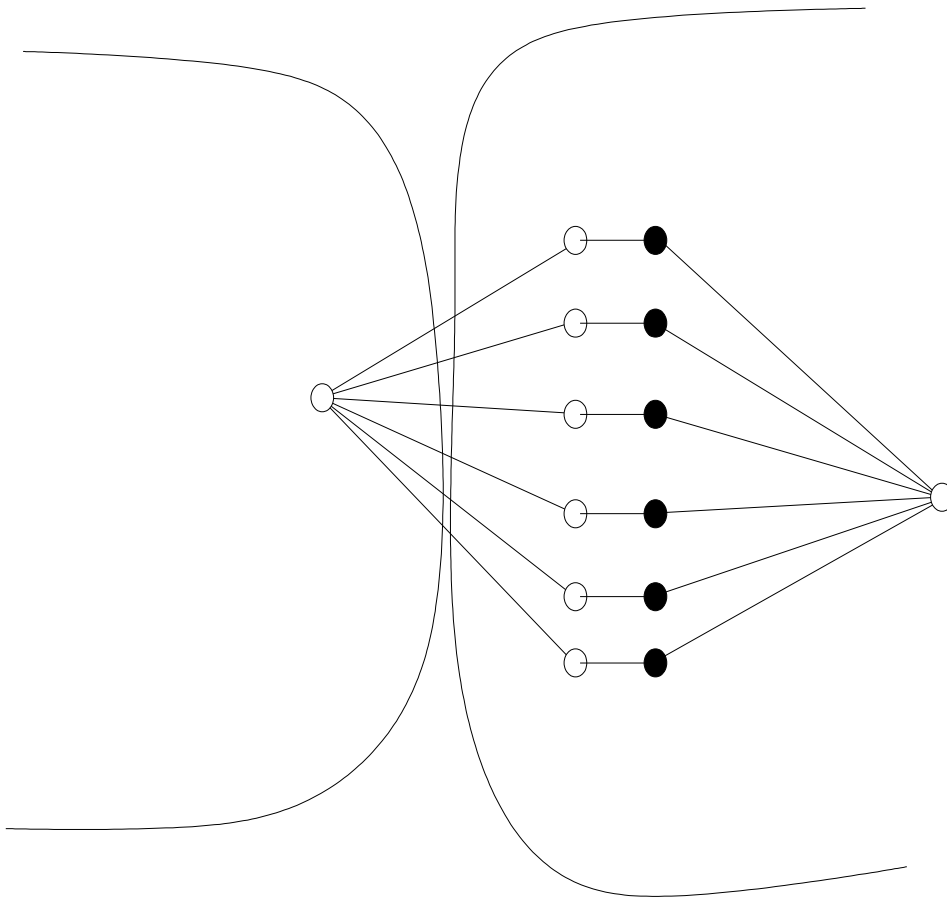


# MDS przy pomocy klastrow

Wydaje się że nie powinno być żadnego problemu:

1. obl klastry, 2. w klastrach obl MDS (nie ma konfliktów jak w MIS...)

*Dlaczego takie podejście nie działa ????*



MDS optymalny w klastrach  
może NIE być opt w całym G...

Wydaje się, że za ten problem  
są odpowiedzialne  
wierz wysokiego stopnia...  
Może wystarczy się ich pozbyć  
???

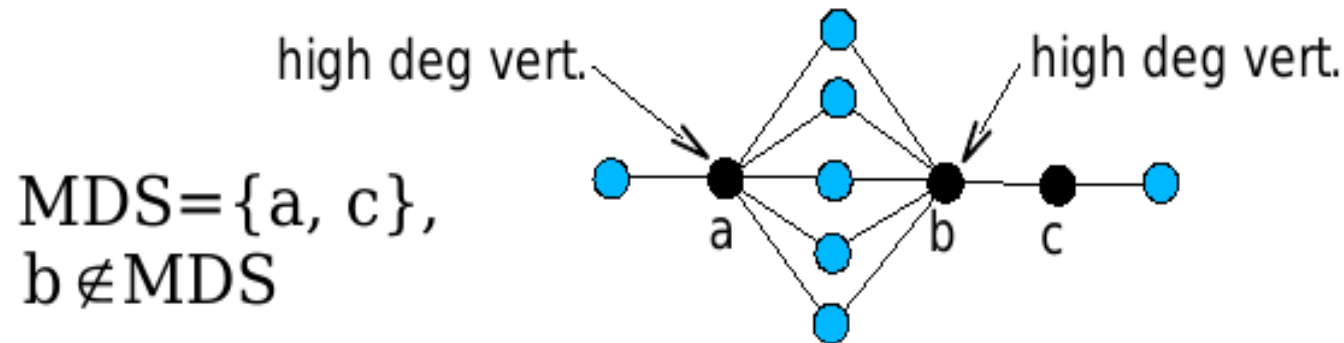
# MDS przy pomocy klastrow

Jak się pozbyć wierz wysokiego stopnia ?

zapewne znowu „preprocessing” (tak jak było w przypadku MM) ??

jaki preprocessing ??? np. taki:

*włączyć do rozw wierz wysokiego stopnia i usunąć zdominowane wierz...  
pozostanie graf BEZ wierz wysokiego stopnia...*

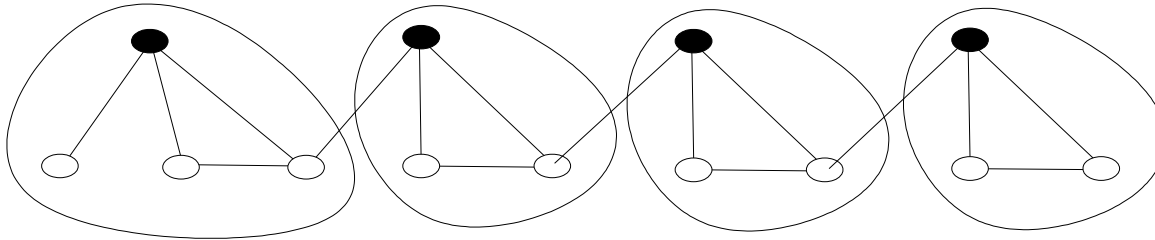


Czyli nie można włączać do rozw wierz wysokiego stopnia,  
jeśli mówimy o  $(1+\epsilon)$  aproks MDS...

# MDS przy pomocy klastrow

## Proc obl MDS:

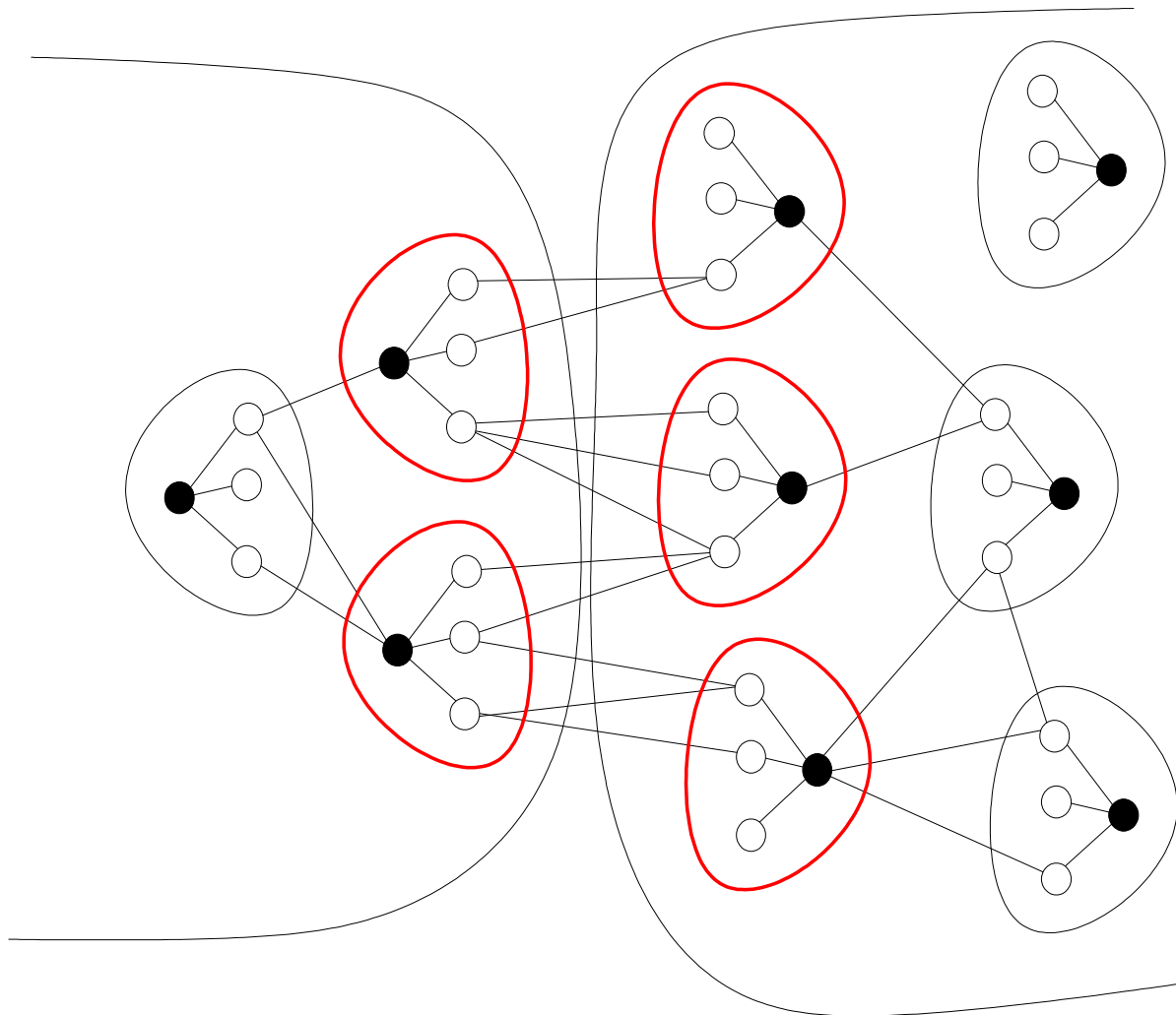
1. Obliczamy stała (np. 52) aproksymację MDS w  $G$ ,  $D\#$
2. Budujemy „małe klastry” w oparciu o  $D\#$  (czarne wierz)



3. „ściskamy” małe klastry do wierz, tworząc wirtualny graf  $G'$ ,  
dla  $e \in E(G')$ :  $\omega(e) := 1$
4. obliczamy „duże klastry” krawędziowe w  $G'$ ,  
licz konektorów  $< \varepsilon |E(G')|$ ,  
ale także licz wierz brzegowych dużych klast.  $< O(\varepsilon) |V(G')|$
5. „wracamy” do oryginalnego grafu z dużymi klastrami
6. obliczamy (opt) MDS w dużych klastrach

**PYTANIE:** dlaczego to nam daje  $(1+\varepsilon)$  aproksymacje MDS w  $G$  ?

# MDS przy pomocy klastrów



„Specjalna” konstrukcja dużych klastrów, eliminuje problem ze slajdu nr 9...

Duże klastry mają cechę:  
Da się zdominować wierz brzegowe klastru małą liczbą wierz (w porównaniu do  $|MDS|$ )

Dlaczego ??? pamiętajmy, że:  
 $|V(G')| = |D\#| < 52 |MDS|$   
licz brzegowych małych klast.  
(tych czerwonych)  
 $< \epsilon |V(G')|$

Czyli da się zdominować brzeg dużych klastrów liczb wierz  
 $< 52 \epsilon |MDS(G)|$   
gdzie  $\epsilon$  jest b. małe...

... oczywiście to tylko szkic argumentu ...

# Jak obliczamy klastry ?

Przypomnijmy, że czas działania algorytmów aproks MWIS, MM, MDS to:  
 $O(1)$  + „czas obliczania klastrów” ...

Zakładamy, że mamy proc obliczającą „ciężkie gwiazdy w grafie planarnym  $G$ ”  
(te gwiazdy są rozłączne i ważą  $> 1/12$  wagi  $E(G)$ )

Klastry budujemy z ciężkich gwiazd w następujący sposób:

$G_0 = G$

Obliczamy w  $G_0$  ciężkie gwiazdy  $S$ .

$G_1 =$  „ $G_0$  po ściśnięciu do wierz gwiazd z  $S$ ”

Obliczamy w  $G_1$  ciężkie gwiazdy  $S$ .

$G_2 =$  „ $G_1$  po ściśnięciu do wierz gwiazd z  $S$ ”

Itd....

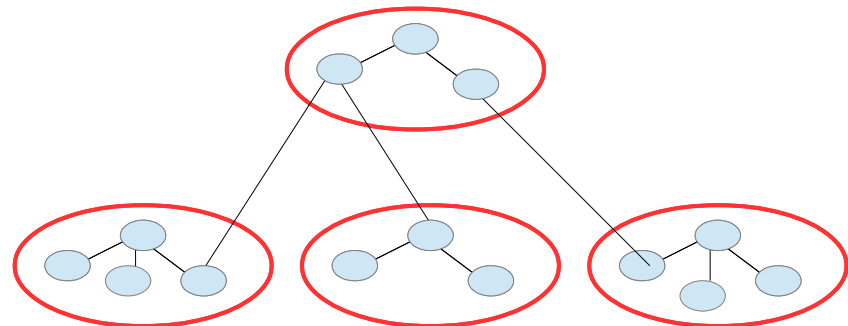
aż dojedziemy do grafu  $G_k$ , gdzie  $k$  to pewna stała...

Wirtualne wierz  $G_k$  to „klastry”,  $\omega(E(G_k))$  to waga „konektorów”.

**Def:**  $\text{diam}(G_i)$  to średnica „fizyczna” (wirtualnego) wierz grafu  $G_i$ .

Okazuje się, że:

1.  $\text{diam}(G_{i+1}) = 3 \text{diam}(G_i) + 2$
2.  $\omega(E(G_{i+1})) < 11/12 \omega(E(G_i))$



# Jak obliczamy klastry ?

Czyli:

$$\omega(E(G_k)) < (11/12)^k \omega(E(G_0)), G_0 = G$$

Zatem dla pewnego stałego  $k$  zależnego od  $1/\varepsilon$ :

$$\omega(E(G_k)) < \varepsilon \omega(E(G_0)) \text{ i } \text{diam}(G_k) < \text{const}$$

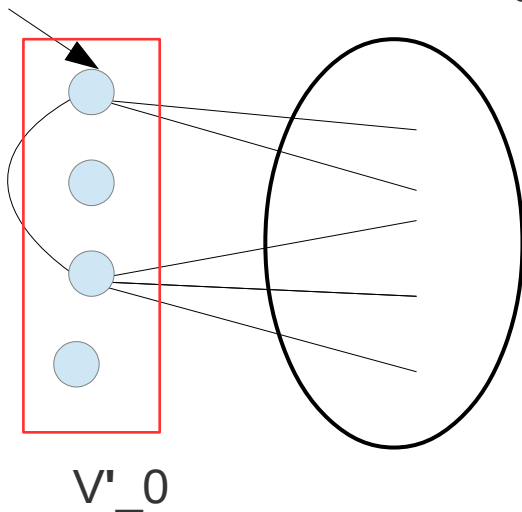
*Pozostaje pytanie, jak obliczamy ciężkie gwiazdy...*

Zauważmy, że drzewo ma stałą frakcję wierz o stopniu  $\leq 2$ ,

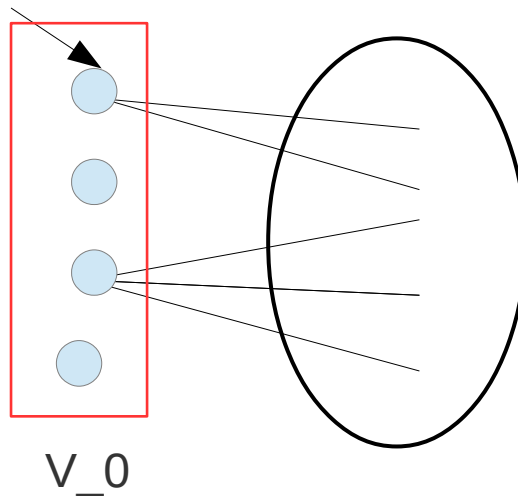
natomiast graf planarny ma stałą frakcję wierz o stopniu  $\leq 6$

*Jak to wykorzystać ??? (met prymitywna, w czasie  $O(\log n \log^* n)$ )*

$\text{deg}() \leq 6$



$\text{deg}() \leq 6$



Można wyrwać z grafu

zb. wierz  $V'_0$ , stop  $\leq 6$

$$|V'_0| > |V|/10$$

Następnie można obl w  $V'_0$

MIS  $V_0$  (przy pomocy C&V)

$$|V_0| > |V|/60$$

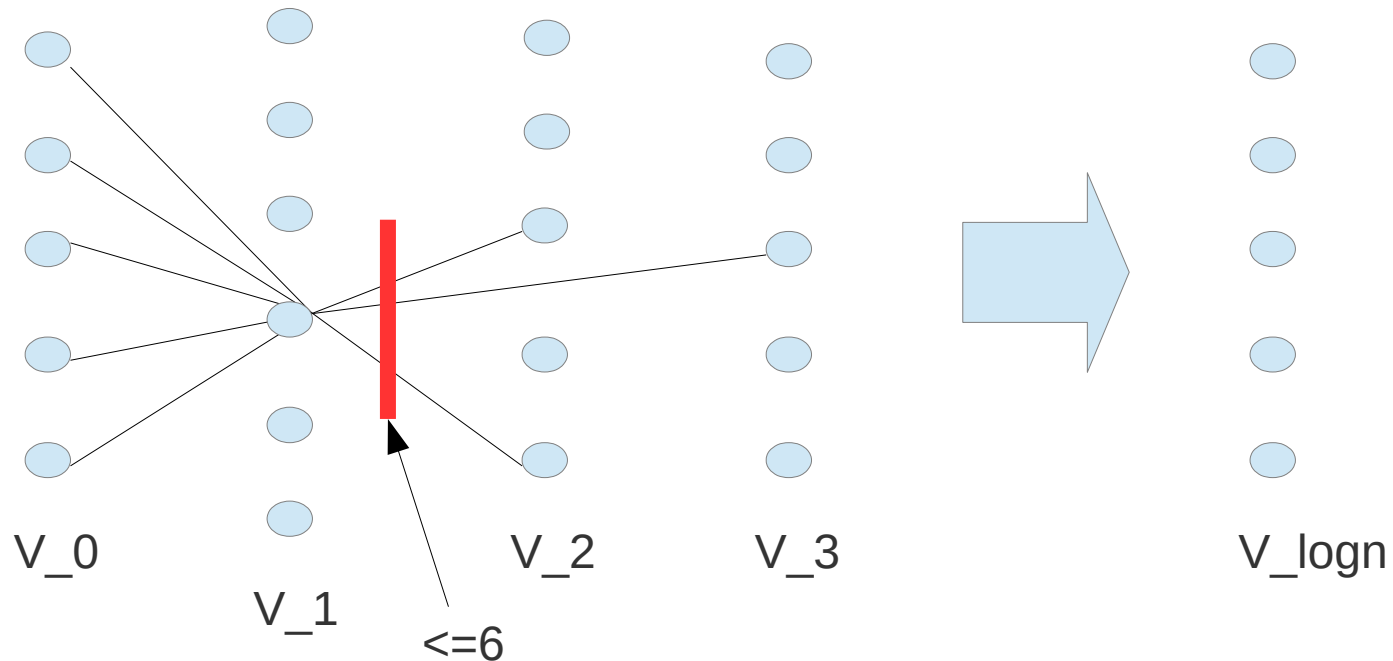
Czyli mamy

zbiór niezależny  $V_0$ ,

który zawiera stałą frakcję  
wszystkich wierz  $V$  ...

# Jak obliczamy klastry ?

Powtarzamy ten proces  $\log n$  razy, do wyczerpania wszystkich wierz grafu:  
*otrzymujemy graf warstwowy...*



Każdy wierz wybiera najcięższa kraw w prawo (1 z 6 !!!)  
otrzymujemy las drzew ukorz, o wysokości  $< \log n$ , który waży  $> 1/6 \omega(E(G))$   
Następnie każde drzewo wybiera „poziomy krawędzi”  
parzyste lub nieparzyste, te które są cięższe...

Otrzymujemy rozłączne gwiazdy które ważą  $> 1/12 \omega(E(G))$

Czas obliczania ciężkich gwiazd tą metodą:  
 $\log n * \text{„czas obl MIS w grafie stop } \leq 6\text{”} + \log n$

Szybkie obliczanie klastrów ?

w czasie  $O(\log^*n)$

patrz: disc2008, str 3-5