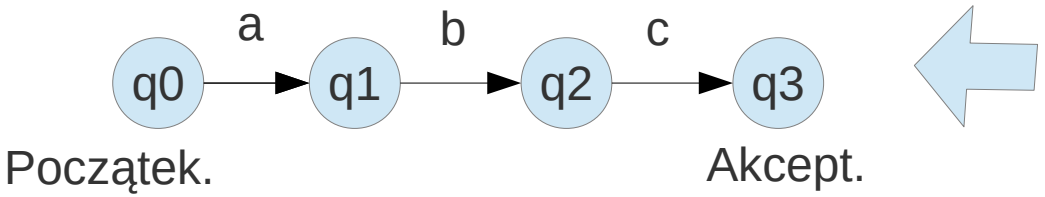
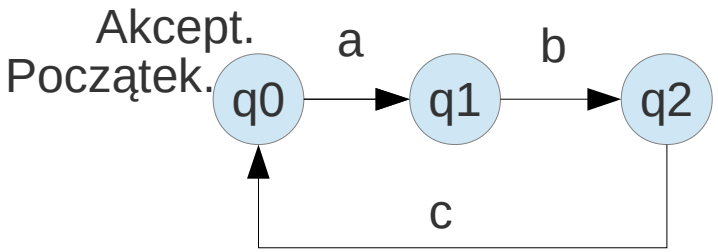
Teoretyczne modele obliczeń
automat skończony

- inaczej „finite state machine”
- definicja formalna:
  jest to piątka (A , Q , q_0 , F , d) , gdzie
  „A” jest skończonym zbiorem symboli wejściowych
  „Q” jest skończonym zbiorem stanów
  „q_0” jest wyróżnionym stanem początkowym należącym do Q
  „F” jest zbiorem stanów akceptujących (końcowych), będącym podzbiorem Q
  „d” jest funkcją przejścia (tranzycją), częściowo określoną (!),
  przypisującą parze (q, a) nowy stan „p”,
  w którym znajdzie się automat po przeczytaniu symbolu „a” w stanie „q”



A = {a, b, c}
Q = {q0, q1, q2, q3}
F = {q3}
d(q0, a) = q1
d(q1,b) = q2
...
Akceptuje tylko napis: abc

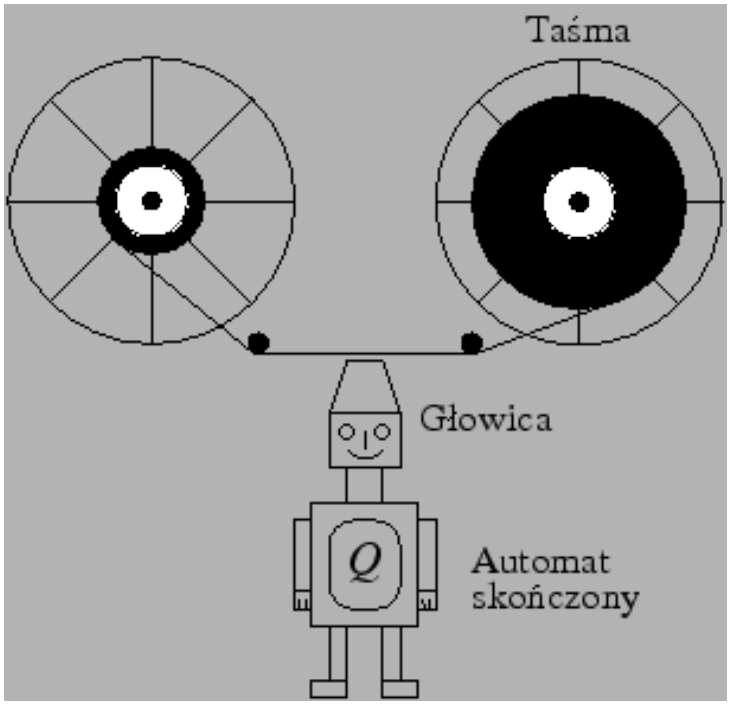


Jakie słowa akceptuje ten automat ?
abc, abcabc, ...

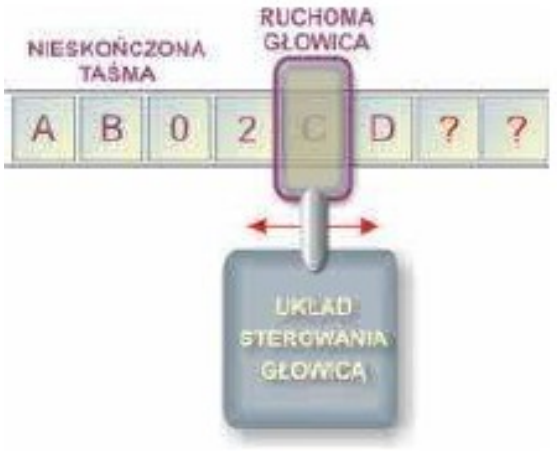
Teoretyczne modele obliczeń
automat skończony

- „język” to zbiór „słów” (ciagów symboli);
- automat skończony **akceptuje język L**
  jeśli kończy w stanie akceptującym dla każdego słowa z L
  natomiast dla słowa spoza L kończy
  w stanie NIE-akceptującym lub w „połowie słowa”
- automaty skończone **deterministyczne** i **niedeterministyczne**
  w niedeterm z wierz może wychodzić >1 strzałka z tym samym symb,
  są możliwe różne sekwencje stanów przy przechodzeniu przez słowe na we
- języki akceptowane przez automat skończony determin można opisać
  przy pomocy tzw „wyrażeń regularnych” abc, (ab)*c, a|bc, itp.
- są różne ulepszenia automatu skończonego...

- czy współczesne komputery
  to automaty skończone ?
  Odp: nie !!!
  trzeba jeszcze dodać odpowiednik „pamięci”
  w maszynie Turinga jest to „taśma z głowicą”



Teoretyczne modele obliczeń
maszyna Turinga



- formalna def **maszyny Turinga** (MT) *trochę uproszczona...*
  To szóstka (Q , δ , A , q_0 , „_” , F), gdzie:
  „Q” – skończony zbiór stanów
  q_0 ∈ Q – stan początkowy,
  „F” – zbiór stanów końcowych / akceptujących
  „A” – skończony zbiór symboli na taśmie
  „_” – symbol pusty
  „δ” – funkcja tranzycji opisana następująco:
  $\delta : Q \times A \rightarrow Q \times A \times \{L , R\}$
  jest to funkcja pobierająca aktualny stan maszyny oraz symbol wejściowy,
  a dającą w wyniku symbol, jaki ma zostać zapisany na taśmie (pod głowicą),
  kolejny stan maszyny oraz przesunięcie głowicy (L lub R).
  uwaga !!: δ jest częściowo określona na Q × A

- elementy składowe się MT:
  1. nieskończona taśma, są na niej symbole z A oraz „_”
  2. zmodyfikowany automat skończony
     d(q,a) podawało nowy stan w automacie skończonym...
     δ(q,a) podaje nowy stan, co zapisać na taśmie, ruch głowicy L/R

- jak działą MT?
  na taśmie umieszcza się dane wejściowe...
  MT zaczyna działać i **zatrzymuje się** gdy brak wartości δ(q,a)
  odczytujemy z taśmy wynik lub zadowala nas „czy stan końcowy jest w F”

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna Turinga

- MT może obliczać funkcję o wartościach TAK/NIE
  jak i o wartościach będących ciągiem symboli z A;
  argument tej funkcji umieszcza się na taśmie jako ciąg symboli z A

- tekstowy zapis działania MT („egzekucji”):
  1 q1 + 1 |- 1 1 q2 1 |- 1 1 1 q2
  gdzie „1”, „+” to symbole na taśmie, q1 i q2 to stany, głowica jest na symbolu za „q?”
  |-* oznacza, że wykonano wiele kroków...

- graficzny opis MT:

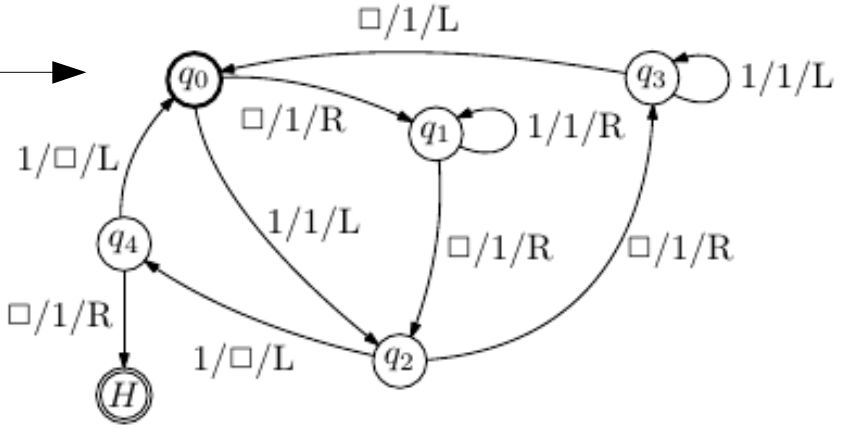


Figure 5: A candidate for a 5-state Busy Beaver

oznaczenia na łukach:
stary symbol/ nowy / L lub R

- def funkcji **obliczalnej** w sensie Turinga:
  funkcja „f” z dziedziną „D”
  jest obliczalna w sensie Turinga
  jeśli istnieje MT taka, że dla każdego w ∈ D
  q0 w |-* qn f(w)
  tzn, że po zakończeniu działania
  MT jest w stanie qn, a na taśmie
  na prawo od głowicy jest ciąg f(w)
  // argument i wynik f() to siągi symboli z A

- wszystko co obliczają dzisiejsze komputery
  jest „obliczalne w sensie Turinga” = teza Churcha Turinga

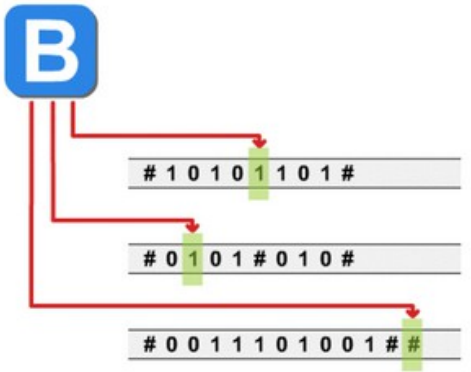
Teoretyczne modele obliczeń
maszyna Turinga

- **uniwersalna** maszyna Turinga
  1. można opisać MT w postaci ciągu symboli i umieścić ten opis na taśmie
  2. MT może symulować działanie MT na wejściu

  przypomina to współczesne komputery które przechowują program w pamięci!!!

- istnieją różne uogólnienia MT, z wieloma taśmami, niedeterministyczne, ...

- złożoność obliczeniowa MT:
  jest bardzo prosta do zdefiniowania!! (to główna zaleta MT)
  złożoność czasowa to liczba tranzycji
    w najgorszym wypadku (dla we o danym rozmiarze)
  złożonośc pamięciowa to liczba użytych komórek taśmy
    w najgorszym wypadku (dla we o danym rozmiarze)
  Co to jest „rozmiar we” w MT ? Odp liczba symboli na taśmie



- **problem stopu** (halting problem): czy MT się zatrzyma
    dla konkretnych danych wejściowych
  Tw: problem czy dana MT (lub program) zatrzyma się
    dostając na wejściu „I” jest *nierozstrzygalny (= funkcja tak/nie jest nieobliczalna)*
      tzn. nie istnieje MT, która otrzymując opis „dowolnej MT” i dowolnego „wejścia I”
      dawałaby odpowiedź czy maszyna się zatrzyma...
        Dowód jest zadziwiająco prosty...

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna Turinga

- eksperymenty z MT:
  symulator o nazwie „Alana”…
  przykładowy program dla symulatora:

```
# poczatkowy stan tasmy:
1 2 2 1 3 4 4 1
# "obliczenia":
(q0 1 q0 2 R)
(q0 2 q0 3 R)
(q0 3 q0 4 R)
(q0 4 q0 5 R)
# cofanie glowicy:
(q0 _ q1 L)
(q1 2 L)
(q1 3 L)
(q1 4 L)
(q1 5 L)
# stan poczatkowy
[q0]
```

Def funkcji δ

Uwaga: ten symulator stosuje pewne skróty przy def δ:
(q1 A q1 A L) = (q1 A q1 L) = (q1 A L)
(q1 A q2 A L) = (q1 A q2 L)

- funkcja „nieobliczalna”: **pracowity bóbr** (busy beaver)
MT ma n -stanów, pustą taśmę, skończony zbiór symboli;
δ powinno być takie aby MT zapisało na taśmie możliwie dużą liczbę „1” oraz się zatrzymało.
B(n) to maksymalna liczba 1 jaka da się uzyskać…
Funkcja ta jest nieobliczalna w sensie Turinga !!!

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna RAM

- maszyna RAM to model powstały już w czasach komputerów (przypomina je !!)

Maszyna RAM

Random Access Machine (RAM) składa się z:

- Taśmy wejściowej, z której maszyna wczytuje dane wejściowe;
- Taśmy wyjściowej, na której maszyna zapisuje wyniki działania;
- Nieskończenie wielu rejestrów $R_0, R_1, \ldots$, z których każdy może przechowywać liczbę całkowitą;
- Listy instrukcji (programu) $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$.

Przez r_i oznaczamy wartość przechowywaną w rejestrze R_i.

READ, WRITE

LOAD, STORE

- program składa się z rozkazów (przypominających asembler współczesnych procesorów)
- istnieje rejestr „licznik rozkazów” który wskazuje bieżący rozkaz
- rejestry mogą pamiętać dowolnie dużą liczbę
- liczba rejestrów jest nieskończona (ale program używa skończonej ich liczby)
- rozmiar we maszyny RAM: liczba bitów na taśmie wejściowej
  (w zasadzie na we są liczby całkowite, ale zapisane na ograniczonej liczbie bitów)

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna RAM

Instrukcje w modelu RAM

W skład ciągu instrukcji Π mogą wchodzić następujące operacje:

LOAD **op**	READ **op**	STORE **op**	WRITE **op**
ADD **op**	SUB **op**	MULT **op**	DIV **op**
JUMP **et**	JGTZ **et**	JZERO **et**	HALT

op może przyjmować postać:

- liczby całkowitej – ADD 3;
- wartości rejestru – MULT r_3;
- wskaźnika do wartości rejestru r_{r_i} – STORE r_{r_7}.

et etykieta (numer) instrukcji, np. JZERO 7, JGTZ **początek**.

GTZ=greater than zero

Akumulator i licznik

Rejestr r_0 jest nazywany **akumulatorem** i ma specjalne znaczenie. Służy jako przestrzeń robocza do przechowywania danych dla bieżącej operacji. Kolejność wykonywania instrukcji jest kontrolowana przez **licznik programu** κ, który przechowuje numer aktualnie przetwarzanej instrukcji.

Dokładniejszy opis rozkazów maszyny RAM jest tutaj

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna RAM

- rola akumulatora r0: ADD r2 <=> r0:= r0+r2
- przykład programu dla maszyny RAM:

Etykieta	Instrukcja	Działanie
	READ r_1	Wczytanie n do r_1
	LOAD r_1	Wczytanie n do akumulatora
	JGTZ pos	if$(r_1 = 0$)
	WRITE 0	then return(0)
	JUMP endif	Skok na koniec programu
pos:	LOAD r_1	else – $r_1 = n$ do akumulatora
	STORE r_2	$r_2 := r_1$
	SUB 1	$r_0 := r_0 - 1$
	STORE r_3	$r_3 := r_1 - 1$
while:	LOAD r_3	r_3 do akumulatora
	JGTZ continue	while $r_3 > 0$
	JUMP endwhile	gdy $r_3 = 0$ - zakończ
continue:	LOAD r_2	r_2 do akumulatora
	MULT r_1	$r_0 := r_2 * r_1$
	STORE r_2	$r_2 := r_2 * r_1$
	LOAD r_3	$r_0 := r_2$
	SUB 1	$r_0 := r_0 - 1$
	STORE r_3	$r_3 := r_3 - 1$
endwhile:	WRITE r_2	return(r_2)
endif:	HALT	Koniec programu

r1>0
(r0>0)

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna RAM

- **czas działania** maszyny RAM
  jest to bardziej skomplikowane niż w maszynie Turinga…
  rozkazy mają różny czas działania w zależności od ich typu:
    * arytmetyczne: czas to liczba bitów operandów
    * adresowanie pośrednie: liczba bitów adresu
- **złożoność czasowa** masz RAM to czas działania jako funkcja rozmiaru we
  rozmiar we to liczba bitów na taśmie wejściowej
- związek maszyn RAM i Turinga:
  obliczalność funkcji - taka sama !!
  złożoność czasowa: wielomianowa równoważność f'(n) <= O(f(n)^const)
  złożoność pamięciowa: liniowa równoważność

Symulacja TM w modelu RAM

Twierdzenie: Jeżeli zadanie rozpoznania języka L przez deterministyczną maszynę Turinga M ma złożoność czasową $f(n)$ (n – rozmiar danych wejściowych) to istnieje program RAM, który oblicza funkcję charakterystyczną χ_L języka L w czasie $O(f(n))$.

Symulacja programu RAM w modelu TM

Twierdzenie: Jeżeli program Π maszyny RAM wylicza funkcję całkowitoliczbową ϕ w czasie $f(n)$ to istnieje deterministyczna maszyna Turinga M o siedmiu taśmach taka, że M oblicza ϕ w czasie $O(f(n)^3)$.

Teoretyczne modele obliczeń
maszyna RAM

- związek maszyny RAM ze współczesnymi komputerami:
  „rejestry maszyny RAM” = „rejestry procesora i pamięć operacyjna”

- prosty komputer przypominający maszyne RAM, programowany w asm:
  porównaj rejestry Z80 (A, B, BC, HL, itp) + 48Kb ram z rejestrami maszyny RAM...

- maszyna RAM a współczesne języki programowania:

Python, JavaScript, Tcl

C, C++, Pascal

Asembler (różne arch procesorów)

procesor, pamięć, i/o

Jakby (uniwersalna) maszyna RAM...
równoważna z maszyną Turinga
Wniosek: w pythonie nie można obliczyć więcej niż na maszynie Turinga...