

Zastosowanie *klastrów* do rozwiązywania problemów w sieciach.

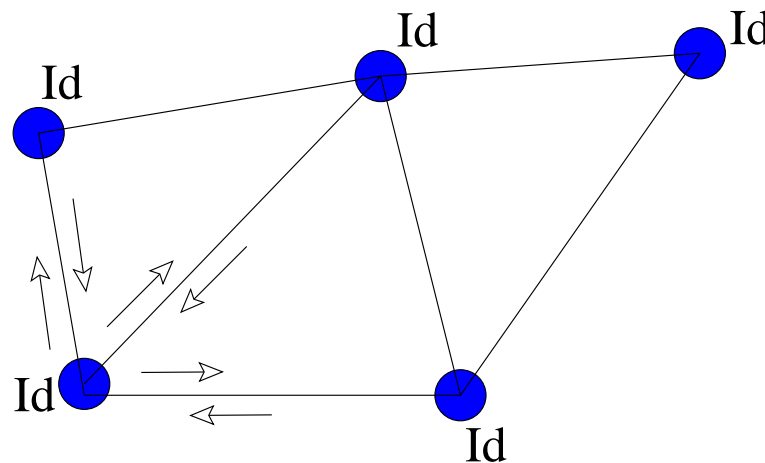
26.03.2010

Plan wykładu

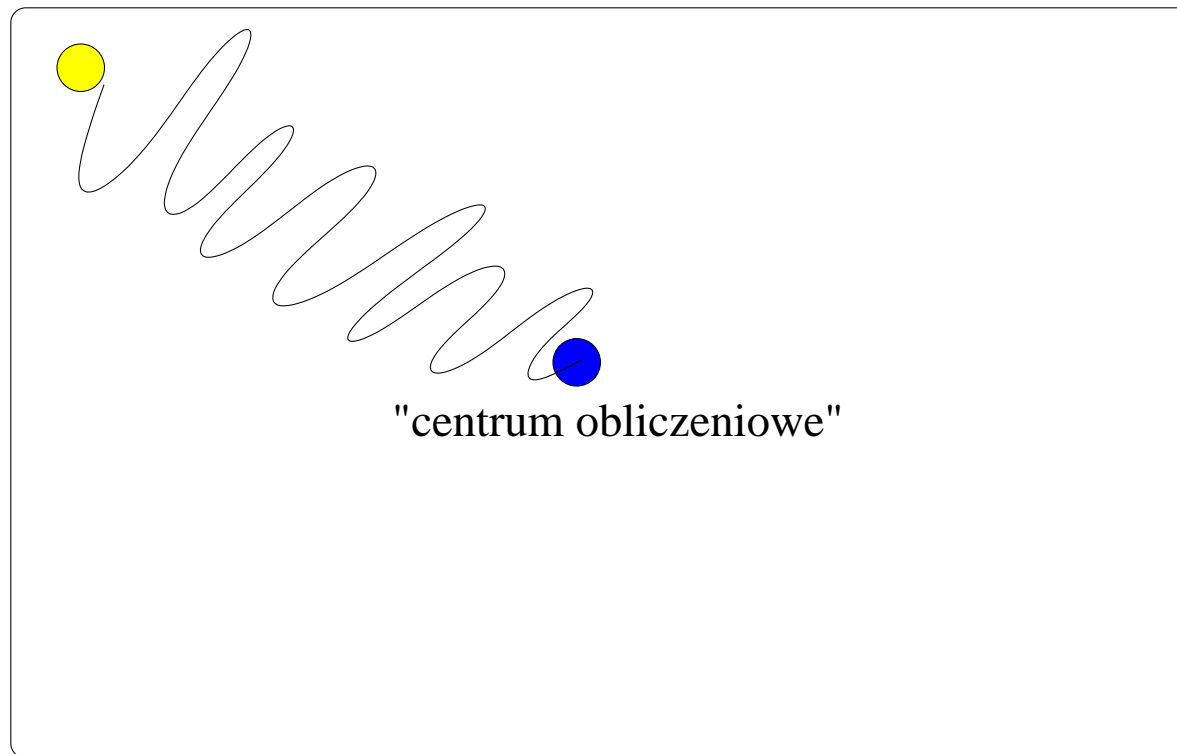
1. model obliczeń
2. klastry w grafach dowolnych dla problemów "optimal"
3. klastry w grafach planarnych dla problemów "optimum"

Model obliczeń

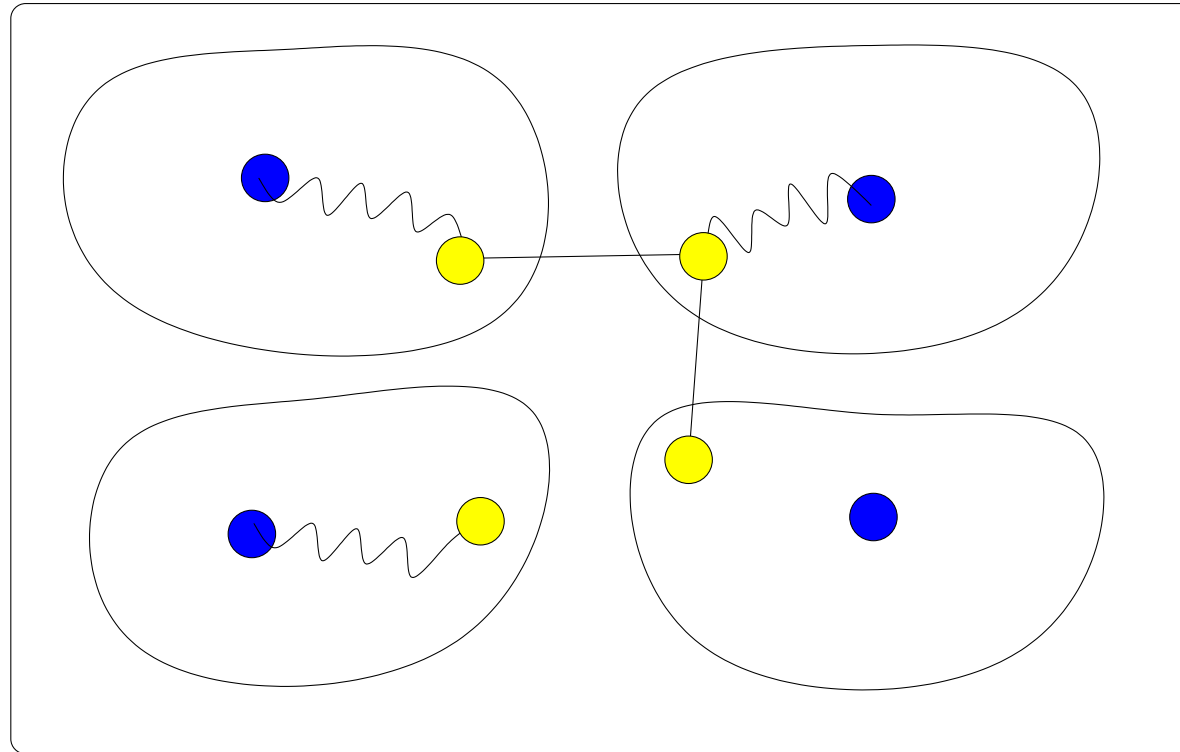
- model rozproszony z przesyłaniem komunikatów
- synchroniczny, pojęcie rundy, złożoność czasowa
- nieograniczona moc obliczeniowa wierzchołka/procesora oraz dowolnie długie komunikaty
- chcemy obliczyć "coś" w grafie komunikacyjnym



- *warto scentralizować obliczenia ???*



zebrać informacje o całym grafie do centrum obliczeniowego,
wykonać obliczenia i rozesłać wyniki spowrotem???



co to są *klastry*?

podział wierzchołków grafu G na podzbiory V_1, \dots, V_k

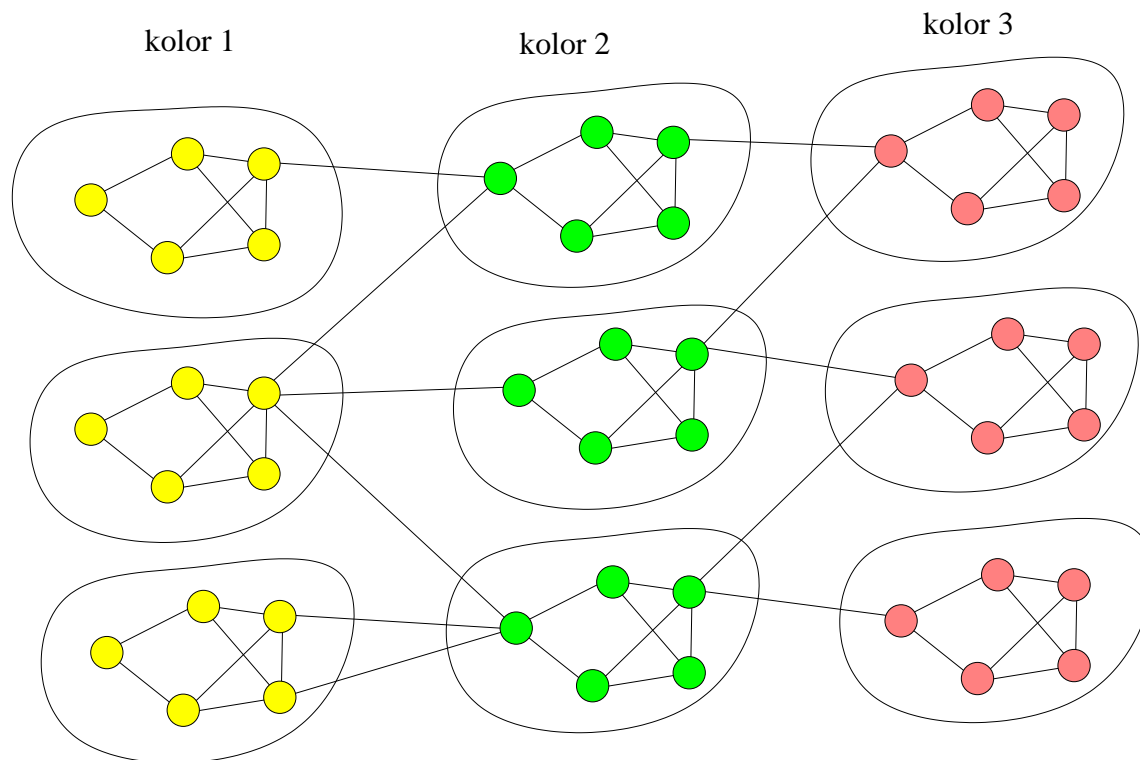
t.ż. $G[V_i]$ jest spójny i ma małą średnicę

... oraz jeszcze coś

Zastosowanie klastrow do rozwiązywania problemów "optimal" w grafach dowolnych

- problemy "optimal":
MIS = Maximal Independent Set,
 $(\Delta + 1)$ - kolorowanie wierzchołkowe
- (D, C) - **dekompozycja**,
Linial i Saks, "Low degree graph decomposition", 1991,
 D - średnica klastrow,
 C - liczba kolorów "grafu klastrow"

przykład (2, 3)- dekompozycji:



mając (D, C) - dekompozycję obliczamy MIS w czasie $C \times D$

można obliczyć $(\log n, \log n)$ - dekompozycje w czasie $O(\log^2 n)$ losowo

procedura znajdująca dekompozycję

(... a właściwie klastry pojedynczego koloru)

parametry wejściowe: B i p

1. każdy wierzchołek z wybiera promień r_z losowo wg rozkładu:

$$P(r_z = j) = p^j(1 - p), \text{ dla } j = 0, \dots, B - 1 \text{ oraz}$$

$$P(r_z = B) = p^B$$

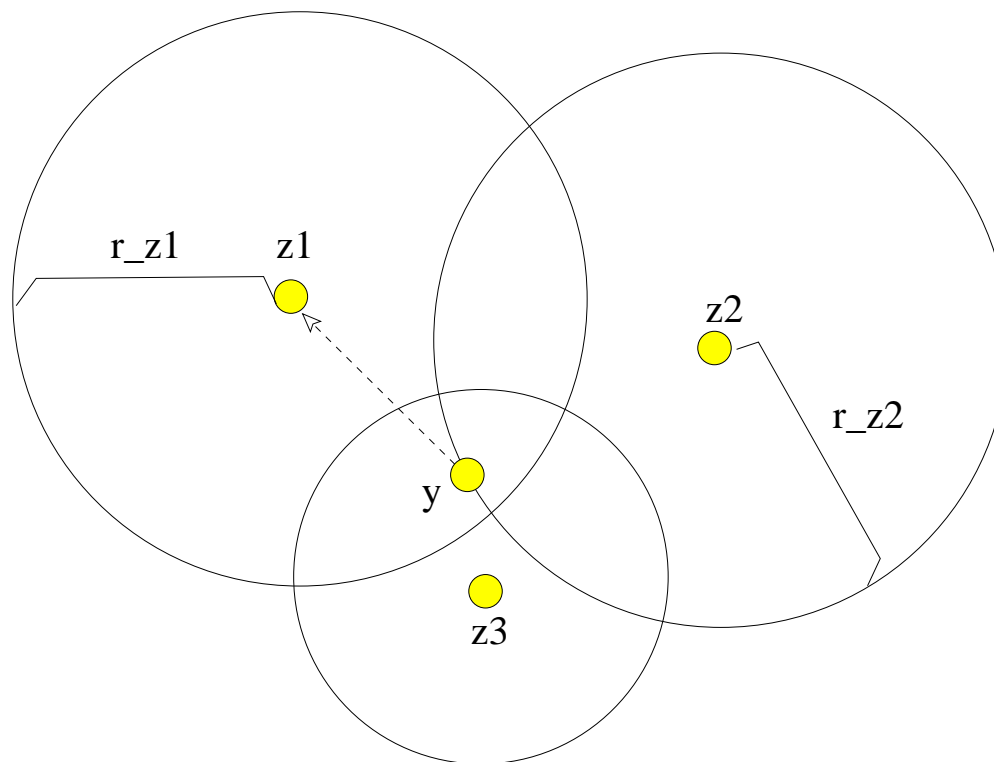
oraz rozsyła komunikat $\langle ID_z, r_z \rangle$ na odległość r_z

2. każdy wierzchołek y wybiera kulę z o max ID spośród tych, które "zobaczył"; $C(y) = ID_z$

3. jeżeli y jest *we wnętrzu* kuli $C(y)$ to włącza się do zbioru S ,
jeśli jest *na brzegu* tej kuli to się nie włącza

4. wynikiem działania jest zb. S

ilustracja działania procedury...



Lemat 1

1. spójne składowe $G[S]$ (klastry) mają średnicę $\leq 2B$

2. $P(y \in S) \geq p(1 - p^B)^n$, $n = |V(G)|$

biorąc $B = \log n$, $p = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $P(y \in S) > c > 0$

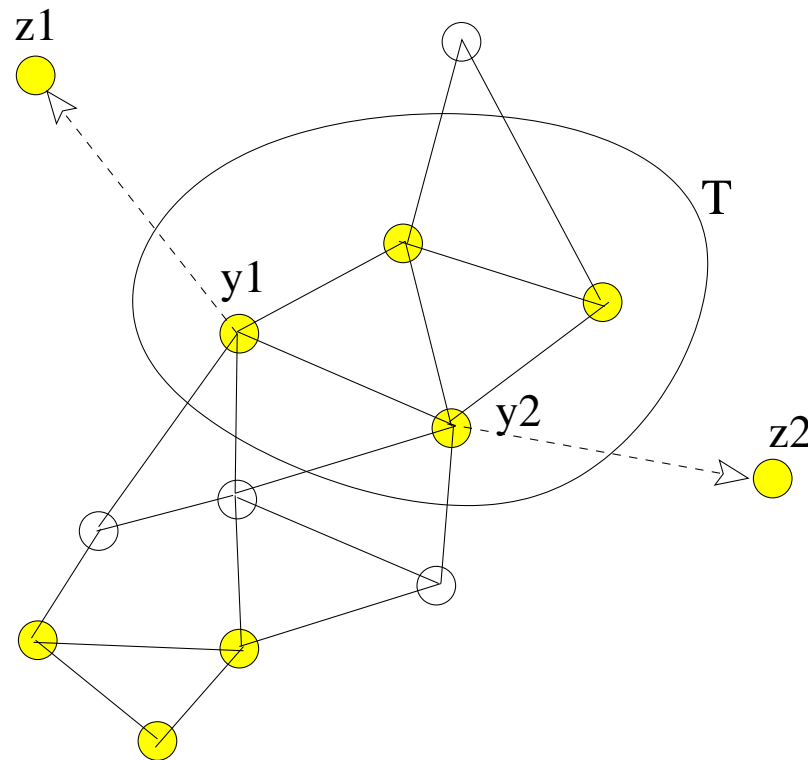
dlaczego klastry mają średnicę $\leq 2B$?

pokażemy, że w pojedynczym klastrze wszystkie $C(y)$ są równe...

niech y_1 i y_2 należą do klastra T oraz $C(y_1) = ID_{z_1}$, $C(y_2) = ID_{z_2}$, $ID_{z_1} < ID_{z_2}$

jeśli y_2 włączył się do S to należał do wnętrza kuli z_2 (o promieniu $\leq B$)

czyli y_1 widzi kulę z_2 ale wybrał z_1 ... sprzeczność!



dlaczego $P(y \in S) \geq p(1 - p^B)^n$?

jeśli $d(z, y) < B$ to:

$$P(y \in S | C(y) = z) = p$$

czyli:

$$\begin{aligned} P(y \in S) &\geq \sum_{z: d(z, y) < B} P(y \in S | C(y) = z) P(C(y) = z) \\ &\geq p \sum_{z: d(z, y) < B} P(C(y) = z) \\ &\geq p(1 - p^B)^n \end{aligned}$$

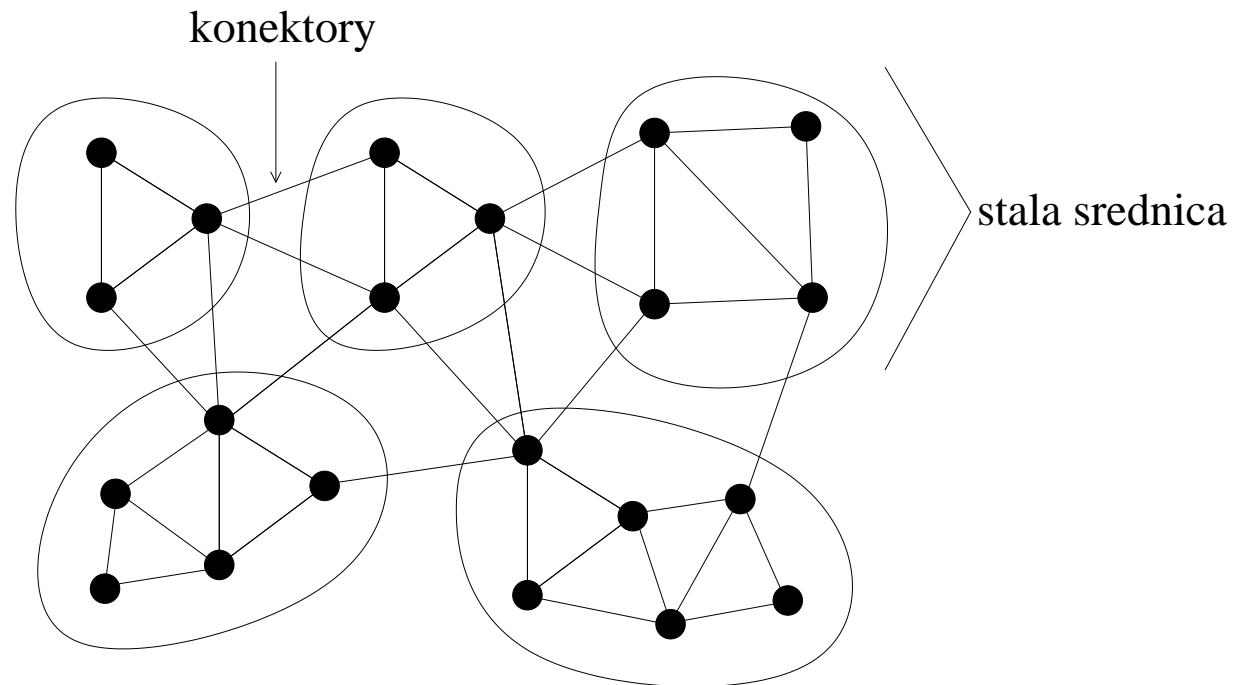
Zastosowanie klastrów do rozwiązywania problemów "optimum" w grafach planarnych

- problemy "optimum" czyli optymalizacyjne:
M(W)IS = Maximum (Weighted) Independent Set,
MM = Maximum Matching,
MDS = Minimum Dominating Set
- PTAS, dowolnie dokładna aproksymacja,
np: I^* to optymalny MIS, I to wynik działania algorytmu,
chcemy aby $|I| > (1 - \epsilon)|I^*|$ dla dowolnego $\epsilon > 0$
- klastry o lekkim brzegu, z wagami na krawędziach ...

klastry o lekkim brzegu, z wagami na krawędziach

$$\omega_e(L) < \epsilon \omega_e(E(G))$$

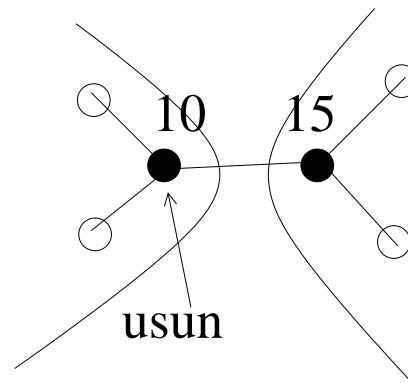
gdzie $\omega_e()$ to waga krawędziowa, L to zbiór konektorów, $\epsilon > 0$



jak użyć klastrow krawędziowych do problemu MWIS ?

MWIS: zbiór niezależny o max wadze wierzchołkowej(!)

1. $\omega_e(u, w) := \min(\omega(u), \omega(w))$
2. obliczamy klastry krawędziowe z wagą $\omega_e()$
3. w każdym klastrze obliczamy dokładny MWIS
4. w przypadku konfliktów na konektorach, usuwamy z rozwiązania wierz. z mniejszą wagą

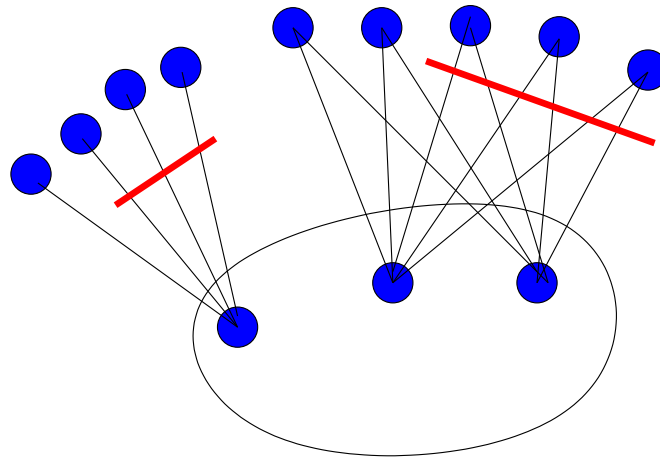


wiadomo, że $\omega(I^*) > \frac{1}{4}\omega(V(G))$ i $\omega_e(E(G)) < 3 \omega(V(G))$
czyli $\omega_e(L) < \epsilon \omega_e(E(G)) < 3 \epsilon \omega(V(G))$
dlatego zmiany w (4) są mało istotne ...

jak użyć klastrow krawędziowych do problemu MM ?

MM: skojarzenie maksymalnej mocy (nieważone)

MM może być małe w porównaniu do n - potrzebny preprocessing...



... po preprocessingu otrzymujemy graf \hat{G} , t.żę:

$$m(\hat{G}) = m(G) \text{ oraz } m(\hat{G}) > \Omega(|V(\hat{G})|),$$

gdzie $m()$ to rozmiar największego skojarzenia

wystarczy obliczyć klastry w \hat{G} , t.żę $|L| < \epsilon |V(\hat{G})|$

jak użyć klastrów krawędziowych do problemu MDS/MCDS ?

MDS: minimalny zbiór dominujący (nieważony)

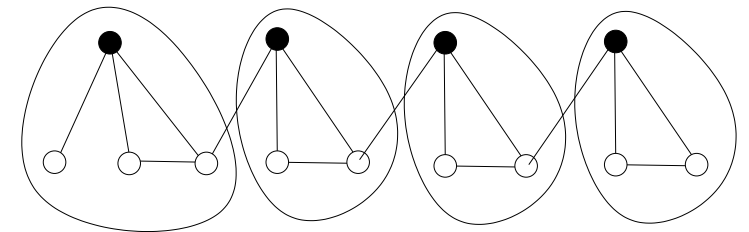
MCDS: minimalny spójny zbiór dominujący (nieważony)

podejście z MWIS zawodzi gdyż MDS może być mały!

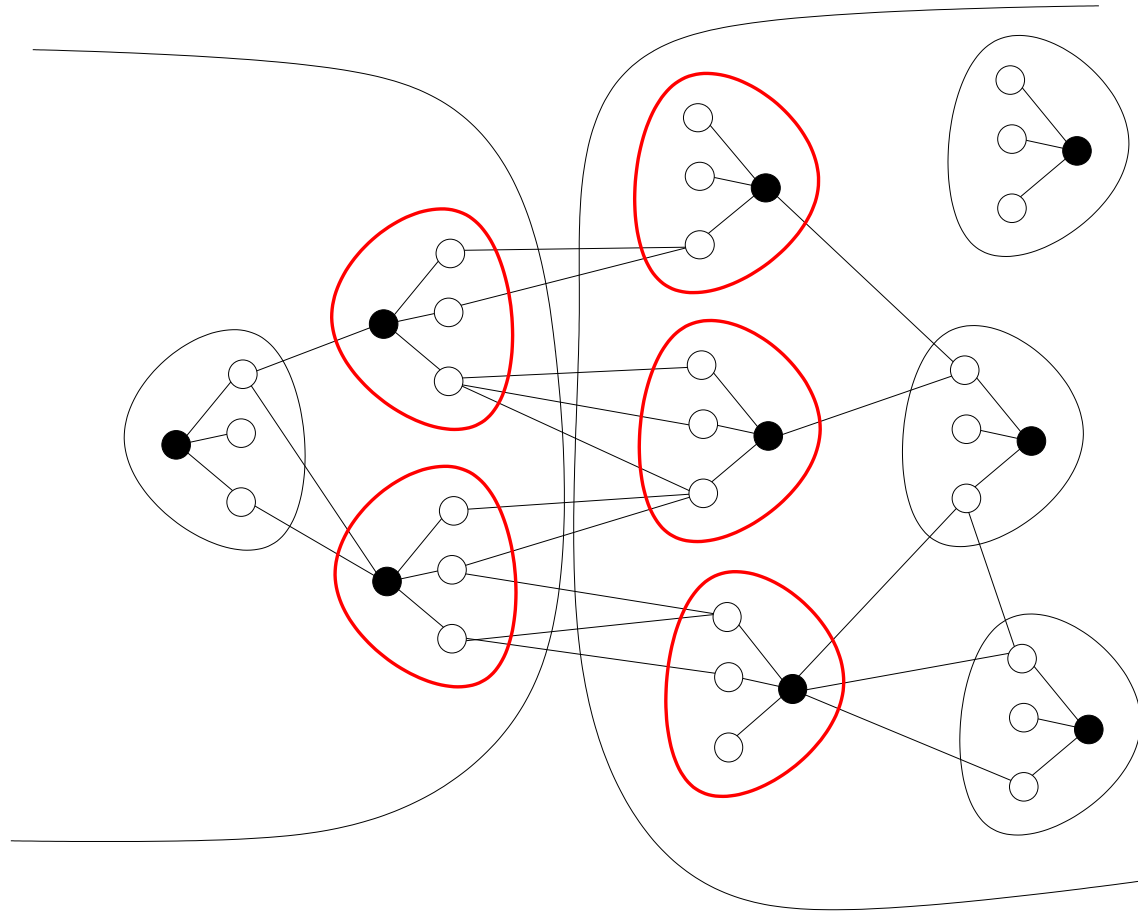
podejście z MM zawodzi gdyż nie wiadomo jak zrobić preprocessing!!

nowe podejście:

1. obliczamy stałą aproksymację MDS D_0
oraz budujemy "małe" klastry



2. ściskamy małe klastry otrzymując graf pomocniczy $aux(G)$
3. w $aux(G)$ obliczamy "duże" klastry krawędziowe (z wagami=1)
t.żę liczba wierzchołków brzegowych $< \epsilon |V(aux(G))|$
4. wracamy z dużymi klastrami do G oraz
obliczamy w nich dokładny MDS



liczba małych klastrów brzegowych jest mała w por. z opt. MDS
czyli można zdominować brzeg małą liczbą wierzchołków
od środka klastra !!!
dzięki temu nie ma ryzyka ...

Znajdowanie klastrów krawędziowych w grafach planarnych

metoda prostsza, ale wolniejsza (w czasie $O(\log n \log^* n)$)

metoda szybka (w czasie $O(\log^* n)$)

wszystko sprowadza się do znajdowania "ciężkich gwiazd" S ,

t.ż. $\omega_e(S) > \frac{1}{10}\omega_e(E(G))$

te gwiazdy się ściska ...

co się dzieje z $\omega_e(E(G))$ i z wewnętrzną średnicą wierzchołków???